МИНИСТЕРСТВО НАУКИ и ОБРАЗОВАНИЯ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.С. Черномырдина
КОЛОМЕНСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ и ФИЗИКИ

Е.Ф. КАЛИНИЧЕНКО

ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

для студентов 1 курса специальностей
менеджмент и государственное и муниципальное управление

Издание первое

Коломна
КИ (ф) МГОУ – 2012

УДК 512.64 **(075);**
ББК22.11

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и физики КИ (ф) МГОУ **Бурмистров В. В.**

Калиниченко Е.Ф.
ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ
для студентов 1 курса специальностей менеджмент и государственное и муниципальное управление. 1-е изд., – Коломна: КИ (ф) МГОУ, 2012, 20 с.

Учебное пособие содержит лекции по интегральному исчислению. Предназначено для студентов специальностей «менеджмент» и «государственное и муниципальное управление» технических университетов дневной формы обучения. Учебное пособие содержит много решенных примеров и может быть использовано студентами при выполнении расчетно-графической работы №3.

Рассмотрено на заседании
кафедры высшей математики и физики
09.11.2011г., протокол № 3/2011

Лекция 1. Определенный интеграл и его свойства

1.1. Понятие определенного интеграла

Зададим на отрезке $[a,b]$, где a,b - конечные числа, неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. Поставим задачу найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$.

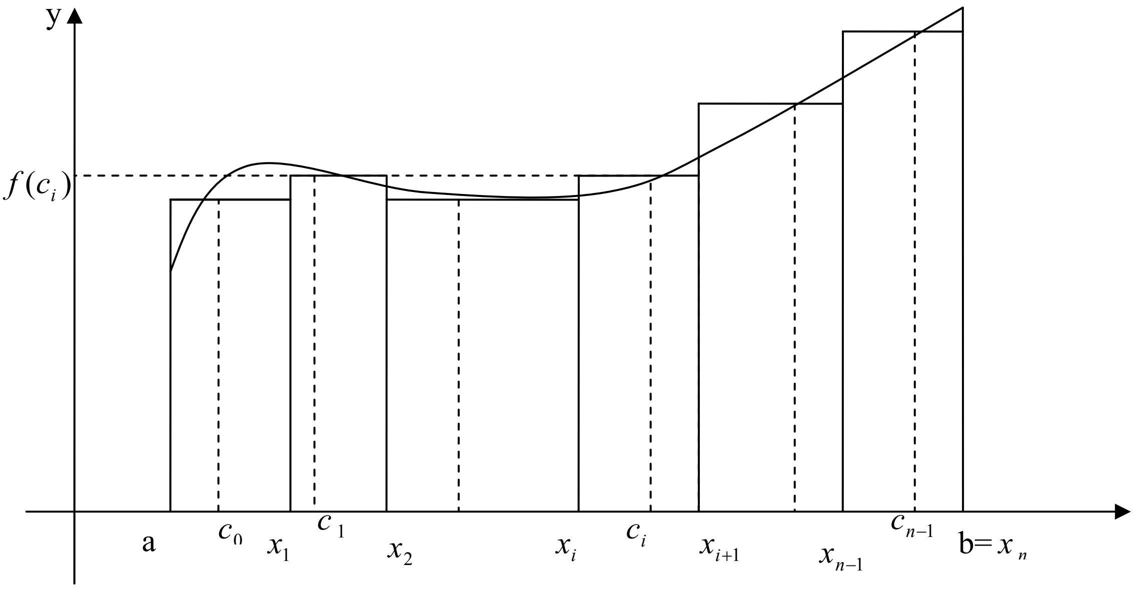

Рис. 1.. Криволинейная трапеция

Разделим отрезок $[a,b]$ (Рис. 1) произвольным образом на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < x_n = b$. Через каждую точку проведем прямую параллельную оси Oy, тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок. Выберем на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $i = 0,1,2,...,n-1$, по произвольной точке $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и определим значения $f(c_i)$ функции в этих точках. Заменим теперь каждую полоску прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, а высота h_i совпадает с соответствующим значением функции $f(x_i)$, то есть $h_i = f(c_i)$. Таким образом, криволинейная трапеция заменилась некоторой ступенчатой фигурой, состоящей из отдельных прямоугольников. Площадь каждого такого прямоугольника $\Delta s_i = \Delta x_i \cdot h_i = \Delta x_i \cdot f(c_i)$. Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь ступенчатой фигуры σ_n.

Сумма вида $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$, называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит как от выбора точек разбиения $x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$, так и от выбора точек $c_0, c_1, ..., c_i, ..., c_{n-1}$.

Площадь криволинейной трапеции можно считать приближенно равной площади ступенчатой фигуры $S \approx \sigma_n$. И это равенство тем точнее, чем больше n и мельче разбиение на частичные отрезки. Обозначим через λ наибольшую из длин частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$.

Определение. Пусть предел интегральной суммы σ_n при стремлении λ к нулю существует, конечен и не зависит от выбора точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ и точек $c_0, c_1, ..., c_i, ..., c_{n-1}$. Тогда этот предел называется *определенным интегралом функции* $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сама функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$. При этом, число a называют *нижним пределом*, число b - *верхним пределом* определенного интеграл; функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением,* а задача нахождения $\int\limits_a^b f(x)dx$ - *интегрированием функции* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Отрезок $[a,b]$ называют *отрезком интегрирования*, а x - *переменной интегрирования.*

Следует заметить, что не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz = \dots$, поскольку смена обозначений такого рода никак не влияет на поведение интегральной суммы σ_n.

Несмотря на сходство обозначений и терминологии, определенный и неопределенный интегралы различные понятия: в то время как $\int f(x)dx$ представляет семейство функций, $\int\limits_a^b f(x)dx$ есть определенное число.

Необходимое условие существования определенного интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на этом отрезке,* то есть $m \le f(x) \le M$, если $x \in [a,b]$. Действительно, если функция $f(x)$ неограниченна, то это свойство функции сохранится, хотя бы в одном из промежутков Δx_i. Тогда за счет выбора в этом промежутке точки c_i можно было бы сделать $f(c_i)$, а с ней и σ_n сколь угодно большой. В этих условиях конечного предела для суммы σ_n существовать не могло бы.

Достаточное условие существования определенного интеграла. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она интегрируема* на этом отрезке.

1.2. Геометрический смысл определенного интеграла.

Из сказанного выше ясно, что искомая площадь S криволинейной трапеции , ограниченной графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a ? x = b$, равна определенному интегралу от этой функции по отрезку $[a,b]$, т.е. $S = \int_a^b f(x)dx$, в случае, если $a < b$.
В этом и заключается геометрический смысл определенного интеграла.

1.3. Экономический смысл интеграла

Пусть функция $z = f(t)$ задает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0,T]$.
Если производительность $f(t)$ постоянна, то объем произведенной продукции Δu, произведенной за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, задается формулой $\Delta u = f(t)\Delta t$. В общем случае имеем приближенное равенство $\Delta u \approx f(c)\Delta t$, где $c \in [t, t+\Delta t]$, которое оказывается тем точнее, чем меньше Δt.
Разобьем отрезок $[0,T]$ на части точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$. За промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$ объем произведенной продукции определится равенством $\Delta u_i \approx f(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,...,n$.
Тогда весь объем продукции равен величине $u \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$.
Если $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0$ каждое из полученных приближенных равенств становится более точным, поэтому $u = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$. Учитывая определение определенного интеграла $u = \int_0^T f(t)dt$, делаем вывод, что если $f(t)$ - *производительность труда* в момент времени t, то $\int_0^T f(t)dt$ есть *объем выпущенной продукции* за промежуток времени $[0,T]$. В этом и заключается экономический смысл определенного интеграла.

1.4. Свойства определенного интеграла

1. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[b,a]$, причем
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Заметим еще, что по определению же полагают

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,b]$, $[a,c]$ и $[c,b]$, тогда она интегрируема и на двух других, причем имеет место равенство
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $kf(x)$, где $k = const$ также интегрируема и на отрезке $[b,a]$, причем,
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$
Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема и на отрезке $[b,a]$, причем,
$$\int_a^b (f(x)dx \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$
Т.е. интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме от этих функций.

Это свойство остается справедливым и для любого конечного числа слагаемых.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, неотрицательна и $a < b$, то
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ при всех значениях $x \in [a,b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$
в предположении, что $a < b$.

Т.е. обе части неравенства можно интегрировать.

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a < b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и имеет место равенство
$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и при всех значениях $x \in [a,b]$ имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

в предположении, что $a < b$.

9. <u>Теорема о среднем</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда существует точка $c \in [a,b]$, такая, что имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

в предположении, что $a < b$.

ЛЕКЦИЯ 2. Вычисление определенных интегралов

2.1. Формула Ньютона-Лейбница

Непосредственное вычисление определенного интеграла связано с трудностями – интегральные суммы имеют громоздкий характер и их трудно преобразовать к виду удобному для вычисления интегралов. По крайней мере, нет общих методов, как это сделать. Каждая задача решалась индивидуально, пока Ньютону и Лейбницу не удалось показать, что вычисление определенного интеграла от функции можно свести к отысканию ее первообразной.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,x]$, где $x\in[a,b]$, т.е. существует интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$. Этот интеграл является функцией x, его обозначают

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

и называют интегралом с переменным верхним пределом. Интеграл с переменным верхним пределом обладает свойствами, сформулированными в следующих теоремах.

Теорема 1. Если $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция и $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, то $\Phi'(x)=f(x)$, или $(\int\limits_a^x f(t)dt)'=f(x)$ (2)

<u>*Доказательство*</u>. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция $\Phi(x)$ получит приращение $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt$.

По свойству 2 определенных интегралов $\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, тогда $\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. По условию $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, а следовательно, и на отрезке $[x,x+\Delta x]$, тогда по теореме о среднем существует точка $c\in[x,x+\Delta x]$, такая что $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot\Delta x$. Таким образом, $\Delta\Phi=f(c)\cdot\Delta x$.

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(c)$. Если $\Delta x\to o$ точка $c\to x$ и тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(c)=\lim\limits_{c\to x}f(c)$.Так как $f(x)$ непрерывная функция, то $\lim\limits_{c\to x}f(c)=f(x)$. Как видим, $\Phi'(x)=f(x)$. Что и требовалось доказать.

Равенство $\Phi'(x)=f(x)$, означает, что функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

Следствие. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Действительно, если функция $f(x)$ непрерывна, то существует функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, а по теореме 1 она является первообразной функции $f(x)$.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть некоторая первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная $f(x)$.

По теореме 1 $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ есть тоже первообразная $f(x)$. Но любые две первообразные функции отличаются лишь на постоянную величину C, следовательно,

$$\int\limits_a^x f(t)dt - F(x) = \mathrm{C} \qquad (4)$$

Постоянную вебличину C легко определить, положив в равенстве (4) $x=a$, получаем $C=-F(a)$, так как $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$, то $\int\limits_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$, или $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Положив, $x=b$ получаем формулу Ньютона-Лейбница.

Это основная формула интегрального исчисления. Она дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов непрерывных функций. Только с открытием этой формулы определенный интеграл смог получить то значение в математике, которое он имеет в настоящее время.

Разность первообразных функций обычно обозначают $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Пример 1. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$.

2.2.Замена переменных в определенном интеграле

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Положим $x=\varphi(t)$, подчинив $\varphi(t)$ условиям:

1. Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и ее значения не выходят за границы $[a,b]$, т.е. если $t\in[\alpha,\beta]$, то $a \le \varphi(t) \le b$.
2. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.
3. На отрезке $[\alpha,\beta]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

Ввиду непрерывности подынтегральных функций существуют не только эти определенные интегралы, но и соответствующие первообразные.

Замечание. Важной особенностью этой формулы является то, что получив искомую первообразную, выраженную через переменную t, мы не должны возвращаться к старой переменной x.

Пример 2. Найти интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Для вычисления интеграла воспользуемся подстановкой $x = 2\sin t$, тогда $4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4\cos^2 t$, $dt = 2\cos t dt$. Причем, если $x = 0$, $t = 0$, а если $x = 2$, $t = \frac{\pi}{2}$. Имеем:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos t 2\cos t dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = 2(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$2(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0) = \pi.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Применив свойство 2 определенного интеграла, имеем:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Во втором интеграле сделаем замену $x = \pi - t$, тогда $dx = -dt$, $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$, $\cos x = \cos(\pi - t) = -\cos t$. Если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \frac{\pi}{2}$, а если $x = \pi$, то $t = 0$.Имеем:

$$\int_{\pi/2}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\pi/2}^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Исходный интеграл тогда равен

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$$

$$-\pi\int_0^{\pi/2} \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = -\pi arctg(\cos t)\Big|_0^{\pi/2} = -\pi(arctg 0 - arctg 1) = \frac{\pi^2}{4}.$$

2.3. **Интегрирование по частям определенного интеграла**

Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные. Интегрируя равенство $d(uv) = udv + vdu$ в пределах от точки $x = a$ до точки $x = b$, получаем $\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$.

По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b d(uv)=uv\Big|_a^b$. Окончательно имеем формулу интегрирования по частям определенного интеграла:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (6)$$

Пример 4. Найти интеграл $\int_0^1 xe^x dx$.

Пусть $u=x$, $dv=e^x dx$ тогда $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$, тогда по формуле интегрирования по частям $\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1\cdot e^1-0-e^x\Big|_0^1=e-(e^1-e^0)=1$.

2.4. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном к нулю

2.4.1. Пусть $f(x)$ непрерывная нечетная функция, определена на отрезке $[-a,a]$, симметричном относительно точки $x=0$.

Докажем, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

Для доказательства разобьем отрезок $[-a,a]$ на две части $[-a,0]$ и $[0,a]$. Тогда по свойству 2 определенного интеграла:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx \qquad (\vee)$$

Применим к первому интегралу правой части этого равенства подстановку $x=-t$, тогда $dx=-dt$ и в силу нечетности функции $f(x)=f(-t)=-f(t)$. Имеем $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_a^0 f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt$ (свойство 1). Подставив это в формулу $(\vee)$, имеем доказываемое.

Пример 5. Найти интеграл $\int_{-5}^{5}(e^x+e^{-x})\sin^{11} xdx$.

Подынтегральная функция $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin^{11} x$ является нечетной, так как $f(-x)=(e^{-x}+e^x)\sin^{11}(-x)=-(e^x+e^{-x})\sin^{11} x$. Следовательно, $\int_{-5}^{5}(e^x+e^{-x})\sin^{11} xdx=0$.

2.4.2. Пусть $f(x)$ непрерывная четная функция, определена на отрезке $[-a,a]$, симметричном относительно точки $x=0$. Выполнив преобразования аналогичные пункту 2.4.1, получим $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

Если $f(x)\ge 0$ на отрезке $[-a,a]$, то это результат получает простое геометрическое истолкование. Площадь S (рис. 1) криволинейной трапеции, симметричной относительно оси ординат, равна удвоенной площади правой половины S_1 или левой половины S_2 этой трапеции.

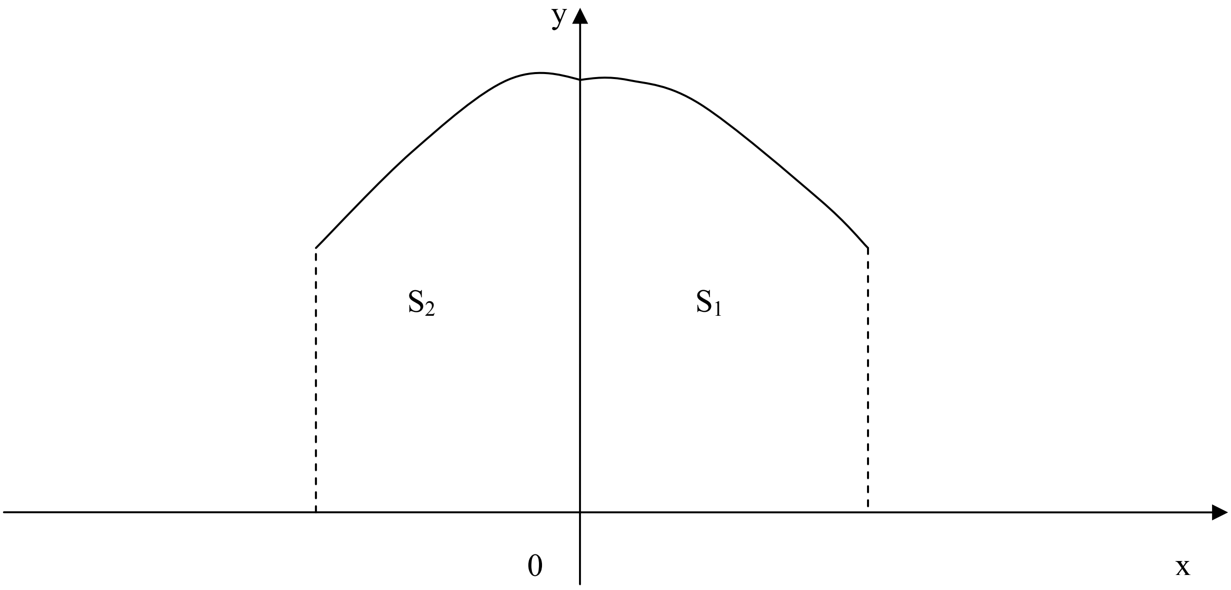

Рис. 1. Площадь S криволинейной трапеции

Лекция 3. Геометрические приложения определенного интеграла

3.1. Вычисление площадей плоских фигур

3.1.1. Пусть $f(x) \geq 0$ при $\forall x \in [a,b]$. Тогда по геометрическому смыслу площадь S под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ численно равна определенному интегралу $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

3.1.2. Если же $f(x) \leq 0$ для любых значений $x \in [a,b]$, то $S = -\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b | f(x) | dx$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$ и осью Ox..

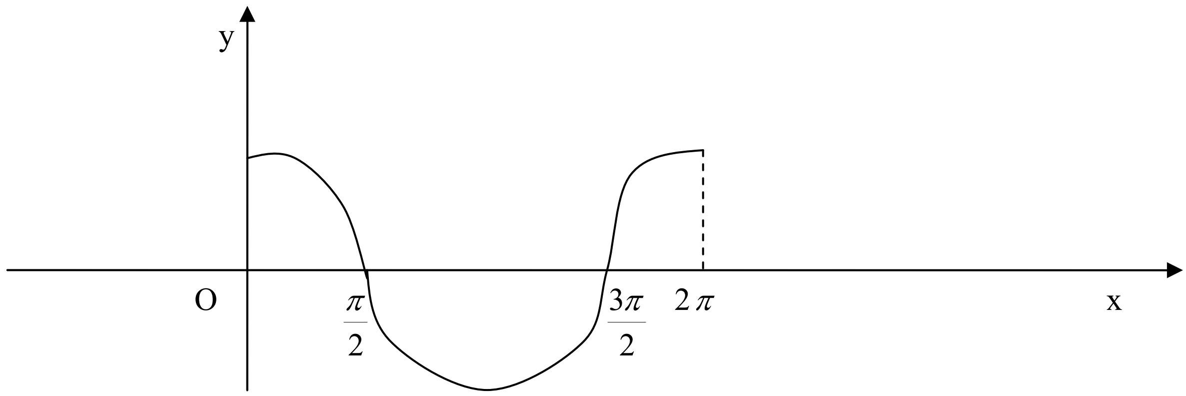

Рис.1. Площадь криволинейной трапеции примера 1

Как видим, $\cos x \geq 0$, если $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ и $\cos x \leq 0$ если $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. тогда

$$S = \int\limits_o^{\pi/2} \cos x dx + \left| \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx \right| + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \left| \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right| + \sin x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = 1+|-1-1|+0-(-1)=4.$$

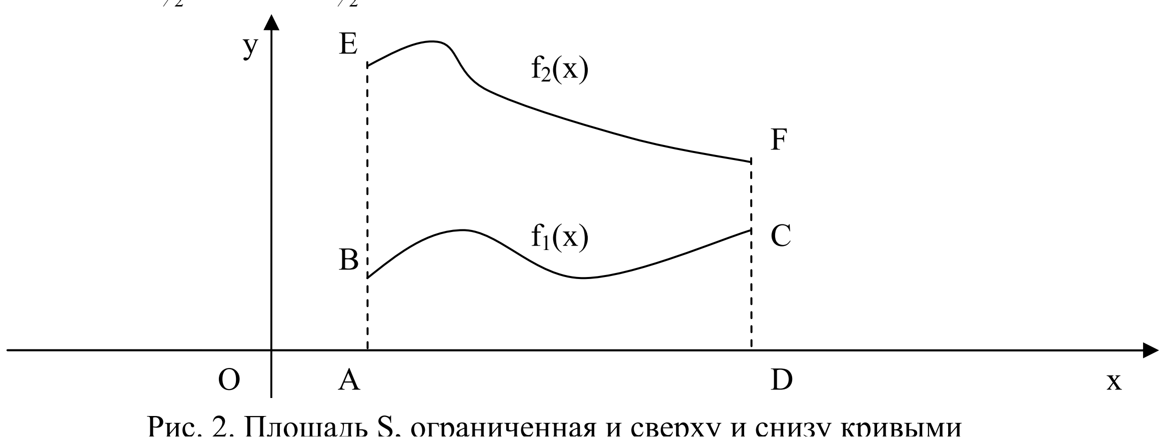

Рис. 2. Площадь S, ограниченная и сверху и снизу кривыми

3.1.3. Если же искомая площадь S ограничена снизу кривой $y = f_1(x)$, сверху $y = f_2(x)$ (см. рис. 2), причем $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех значений $x \in [a,b]$. Тогда рассматривая ее как разность площадей двух фигур AEFD и ABCD, получаем формулу $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

Пример 2. Вычислить площадь, заключенную между двумя параболами $y^2=x$ и $y=x^2$.

Найдем точку пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x=y^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x=x^4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x(1-x^3)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Как видим, кривые пересекаются в двух точках $O(0,0)$ и $A(1,1)$.

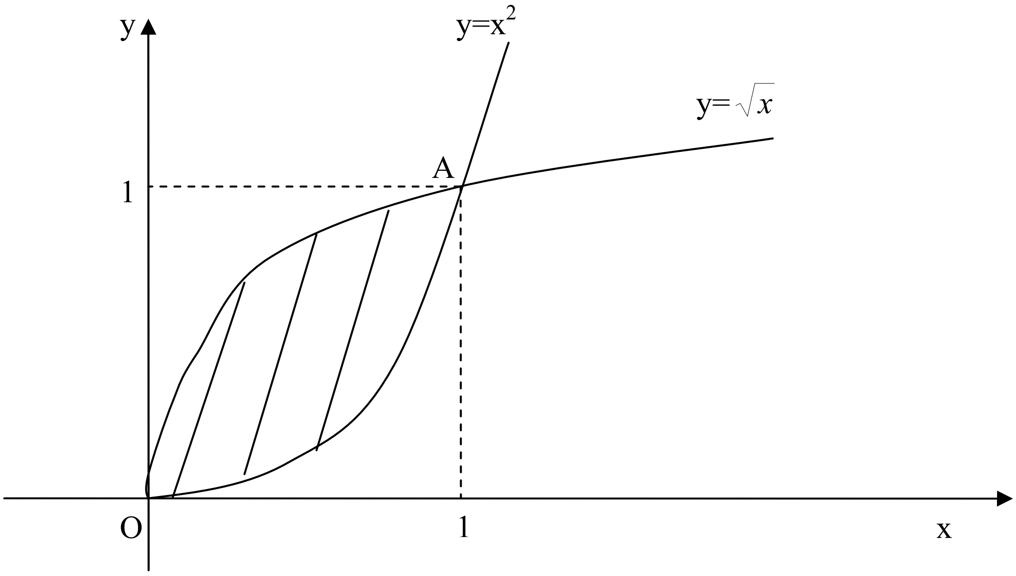

Рис. 3. Криволинейная трапеция примера 2

Из рисунка 3 видно, что если $x\in[0,1]$, то кривая $y=\sqrt{x}$ лежит выше кривой $y=x^2$. Следовательно, если $x\in[0,1]$ $x^2\le\sqrt{x}$. Тогда, на основании выше изложенного, искомая площадь равна

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}(2-1)=\frac{1}{3}.$$

3,2. Объем тел вращения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)\ge 0$ (Рис. 4.). Найдем объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x), x=a, x=b$ и осью Ox.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на элементарные отрезки точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < x_n = b$ и на каждом, полученном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ произвольным образом выберем точку $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда искомый объем равен $V_x \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x_i$.

В этой формуле i – тое слагаемое есть объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $r_i = f(c_i)$.

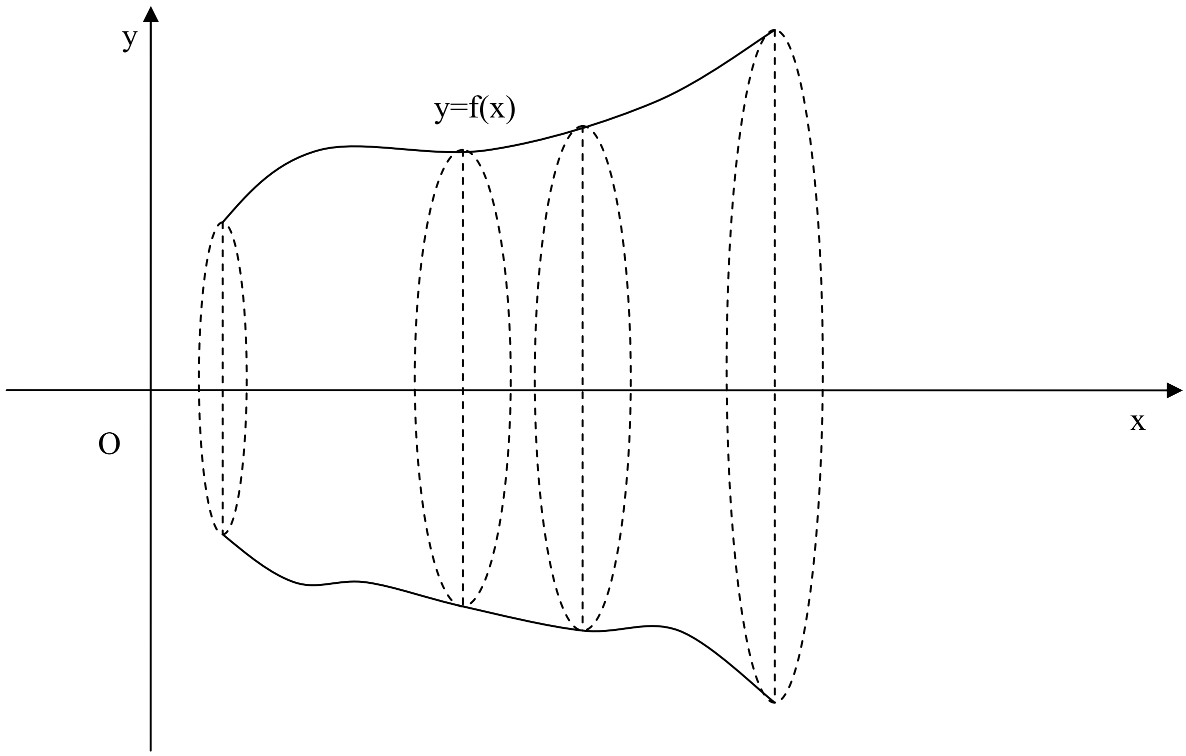

Рис. 4. Объем тела вращения

.

Причем, приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i, поэтому $n \to \infty$ $d = \max \Delta x_i \to 0$ и получаем $V_x = \lim\limits_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x_i$.

Но выражение, стоящее в правой части равенства есть ни что иное, как определенный интеграл. Следовательно, $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Формально заменяя в формуле V_x переменную x на y, получаем формулу для вычисления объема V_y тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy $V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$.

Пример 3. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями $y = e^{x/2}$, $y = 0, x = 0, x = 2$.

Построим фигуру, ограниченную, заданными линиями (рис. 5).

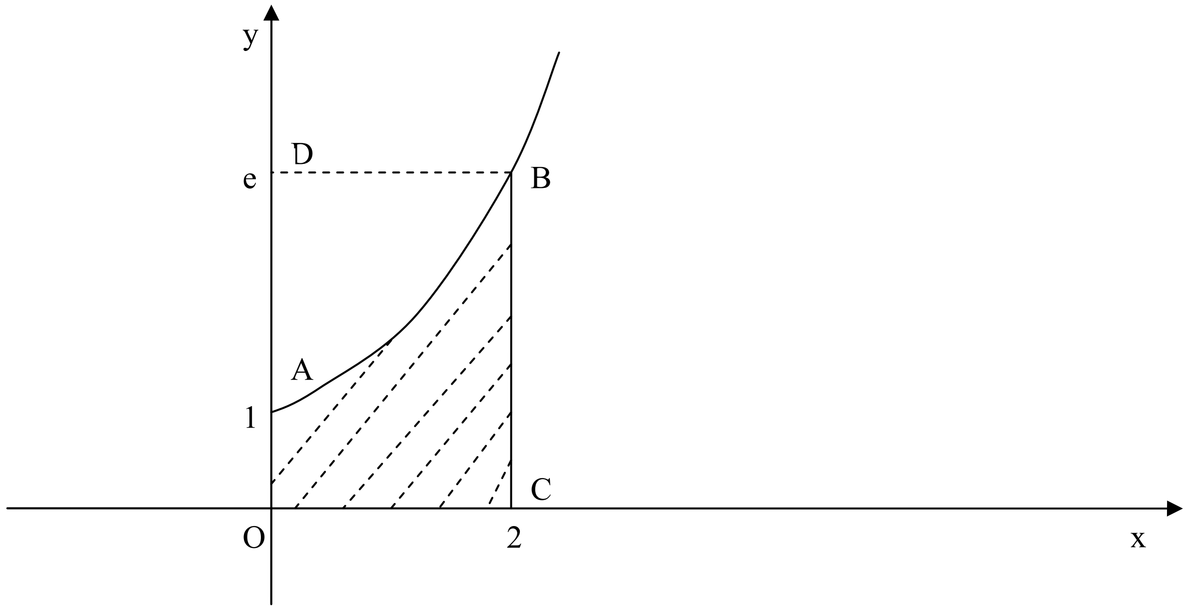

Рис. 5. Фигура, ограниченная линиями примера 3

$V_x = \pi\int_0^2 (e^{x/2})^2\,dx = \pi\int_0^2 e^x\,dx = \pi e^x\Big|_0^2 = \pi(e^2-1)$.

Разрешим уравнение $y = e^{x/2}$ относительно переменной x, $\frac{x}{2} = \ln y \Rightarrow x = 2\ln y$.

Из чертежа видно, что объем V_y равен разности двух объемов $V_y = V_{ODBC} - V_{ADB}$. $V_y = \pi\int_0^e (2)^2\,dy - \pi\int_1^e (2\ln y)^2\,dy = \pi 4y\Big|_0^e - \pi 4\int_1^e \ln^2 y\,dy$.

Последний интеграл вычисляем методом интегрирования по частям.

Пусть $u = \ln^2 y$, $dv = dy$, тогда $du = 2\ln y\frac{1}{y}dy, v = y.$

$$V_y = 4\pi\ e - 4\pi(y\ln^2 y\Big|_1^e - \int_1^e y2\ln y\frac{1}{y}dy) = 4\pi\ e - 4\pi(e\ln^2 e - e\ln^2 1 - 2\int_1^e \ln y\,dy) = 4\pi\ e$$
$$-4\pi e + 8\pi\int_1^e \ln y\,dy = 8\pi\int_1^e \ln y\,dy.$$

Еще раз интегрируем по частям. Пусть $u = \ln y$, $dv = dy$, тогда $du = \frac{1}{y}dy, v = y.$

$$V_y = 8\pi(y\ln y\Big|_1^e - \int_1^e y\frac{1}{y}dy) = 8\pi(e\ln e - \ln 1 - y\Big|_1^e) = 8\pi(e-(e-1)) = 8\pi.$$

Лекция 4. Несобственные интегралы

До сих пор рассматривались интегралы $\int_a^b f(x)dx$, для которых отрезок $[a,b]$ был конечным, а функция $f(x)$ на нем непрерывна. Эти интегралы являлись пределом интегральной суммы. Назовем такие интегралы *собственными.* Для обобщения понятия определенного интеграла рассмотрим : 1) определенный интеграл от непрерывной функции на бесконечном интервале; 2) интеграл на конечном интервале от разрывной функции. Назовем такие интегралы *несобственные интегралы.*

4.1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a,b]$, при любом $b>a$.

Определение. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при верхнем пределе b стремящемся к бесконечности ($b\to+\infty$), если он существует, будем называть *несобственным интегралом* в пределах от a до $+\infty$ и обозначать символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, а функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a,+\infty)$. Если предел не существует или равен ∞, то говорят, что интеграл *расходится*, а функция на промежутке $[a,+\infty)$ не интегрируема. Таким образом, по определению $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Совершенно аналогично определяется несобственные интегралы $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$.

Если наряду с интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится *абсолютно*, а функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на промежутке $[a,+\infty)$. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится, то говорит, что функция $f(x)$ интегрируема *условно* на промежутке $[a,+\infty)$.

Замечание. Из абсолютной сходимости интеграла следует просто сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Но не наоборот.

4.2. Геометрический смысл несобственного интеграла.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически дает площадь $F(x)$ криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, поэтому несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)$ представляет площадь бесконечно длинной трапеции (Рис. 1)

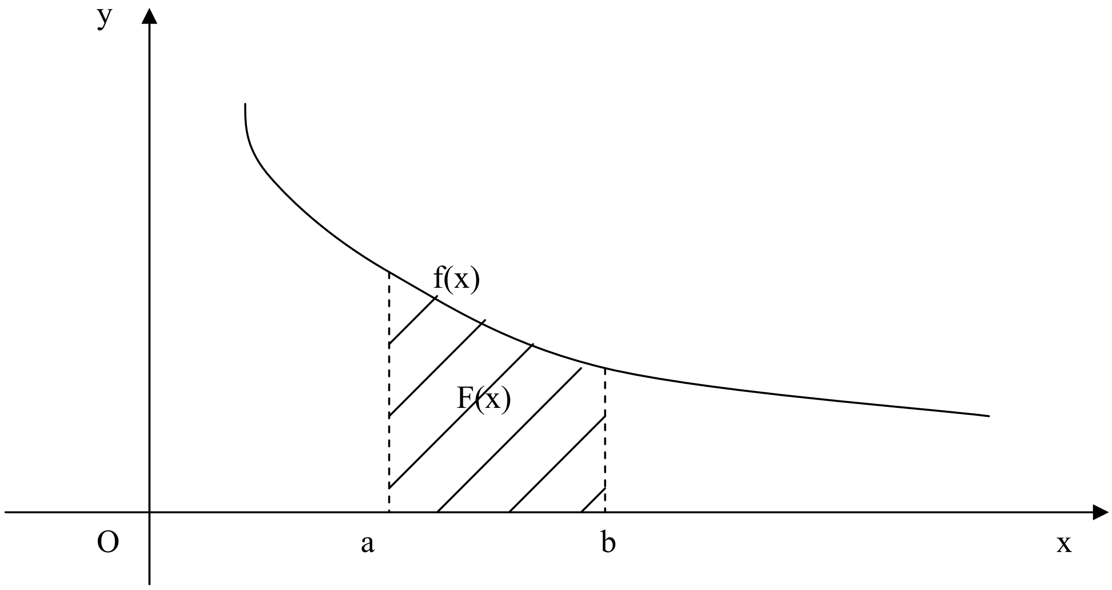

Рис. 1. Бесконечно длинная трапеция

Если несобственный интеграл сходится, то площадь такой трапеции выражается определенным числом. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то площадь равна бесконечности.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} arctg(x+1)\,|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctg(x+1)\,|_0^b =$$

$$\lim_{a\to-\infty}(arctg1 - arctg(a+1)) = \lim_{b\to+\infty}(arctg(b+1) - arctg1) = (arctg1 - arctg(-\infty)) +$$

$$(arctg\ (+\infty) - arctg\ 1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}d(-x) = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^0) = -e^{-\infty}+1 = 1.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-5}dx = \lim_{b\to+\infty}(\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_1^b) = \lim_{b\to+\infty}(\frac{b^{-4}}{-4}-\frac{1}{-4}) = \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4b^4}) = \frac{1}{4}-\frac{1}{\infty} = \frac{1}{4}.$$

4.3. Исследование на сходимость

Часто достаточно установить сходится или расходится интеграл, и оценить его значения. Для этой цели полезны следующие теоремы.

Теорема 1. Если для каждого значения x, большего некоторого значения a выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится, причем, выполняется неравенство $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Заметим, что для любого значения $x \ge 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^2(1+e^x)} \le \frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$, сходится. Следовательно, по теореме 1 заданный интеграл тоже сходится, причем его значение удовлетворяет неравенству $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)} \le 1$.

Теорема 2. Если для каждого значения x, большего некоторого значения a выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ тоже расходится,

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^3}}$.

Заметим, что для любого значения $x \ge 1$ выполняется неравенство $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} \ge \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/2}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, расходится. Следовательно, по теореме 2 заданный интеграл тоже расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x dx}{1+x^2}$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos x}{1+x^2}| dx$. Учтя, что $|\cos x| \le 1$, имеем $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} arctgx|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

сходится, тогда по теореме 1 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos x}{1+x^2}| dx$, а это означает, что заданный интеграл сходится абсолютно.

4.4. Интегралы от разрывной функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,b)$, а в точке $x = b$ функция терпит разрыв. Несобственный интеграл от разрывной функции определяется следующим образом $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to b-0} \int\limits_a^\beta f(x)dx$. В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*, а функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a,b)$. Если предел не существует или равен ∞, то говорят, что интеграл *расходится*, а функция на промежутке $[a,b)$ не интегрируема.

Если наряду с интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится *абсолютно*, а функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на промежутке $[a,+\infty)$. Если же интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то говорит, что функция $f(x)$ интегрируема *условно* на промежутке $[a,b)$.

Замечание. Из абсолютной сходимости интеграла следует просто сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Но не наоборот.

Если функция имеет разрыв в левом конце отрезка $[a;b]$ (если $x = a$), то по определению $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\gamma\to a+0} \int\limits_\gamma^b f(x)dx$.

Если функция имеет разрыв в некоторой точке $x = c$ отрезка $[a;b]$ (то есть $c \in (a;b)$), то полагают, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*, если сходятся оба интеграла, стоящие справа. В обоих случаях понятия абсолютной и условной сходимости определяются аналогично.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=0$. Поэтому $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{a\to 0+0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{a\to 0+0} (2\sqrt{x})\Big|_a^1 = 2\lim\limits_{a\to 0+0}(1-\sqrt{a}) = a$. Интеграл сходится.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=0$. Поэтому $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\gamma\to 0+0} \int\limits_{-1}^{\gamma} \frac{dx}{x^2} + \lim\limits_{\to 0-0} \int\limits_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\gamma\to 0+0} (-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{\gamma} + \lim\limits_{\alpha\to 0-0} (-\frac{1}{x})\Big|_{\alpha}^{1} = \lim\limits_{\gamma\to 0+0} (-\frac{1}{\gamma} - 1)$

$+ \lim\limits_{\alpha\to 0-0} (-1 + \frac{1}{\alpha}) = -\infty - 1 - 1 + (-\infty) = -\infty$. Интеграл расходится.

Для разрывной функции теоремы 1 и 2 остаются справедливыми.

Пример 9. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$.

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=0$. Так как значения $x \in [0;1]$, то имеет место очевидное неравенство $x \ge 0 \Rightarrow 4x^3 \ge 0$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{a\to 0+0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{a\to 0+0} (2\sqrt{x})\Big|_a^1 = 2\lim\limits_{a\to 0+0}(1-\sqrt{a}) = a$ сходится. Следовательно. заданный интеграл тоже сходится.

Геометрически несобственный интеграл от разрывной функции соответствует бесконечно высокой криволинейной трапеции (Рис. 2).

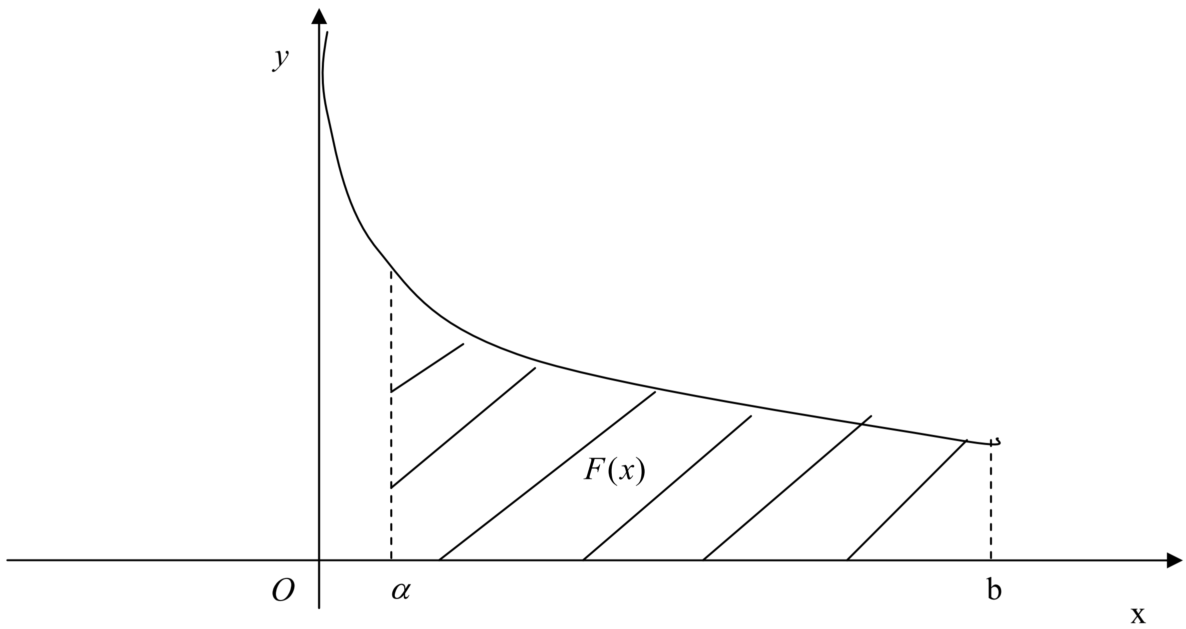

Рис.2. Бесконечно высокая трапеция.

ОГЛАВЛЕНИЕ

КАЛИНИЧЕНКО ЕЛЕНА ФЕДОРОВНА

ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

для студентов 1 курса специальностей менеджмент и государственное и муниципальное управление

Научный редактор: Бурмистров В. В.

Подписано в печать 8.02.12.
Печать лазерная. Усл. печ. л. 1
Заказ № 010. Тираж 100 экз.