МИНИСТЕРСТВО НАУКИ и ОБРАЗОВАНИЯ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.С. Черномырдина
КОЛОМЕНСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ и ФИЗИКИ

Е.Ф. КАЛИНИЧЕНКО

ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

для студентов 1 курса специальностей 080200 менеджмент и 081100 государственное и муниципальное управление

Издание первое

Коломна
КИ (ф) МГОУ – 2012

УДК 512.64 **(075);**
ББК22.11

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и физики КИ (ф) МГОУ **Бурмистров В.В.**.

Калиниченко Е.Ф.
ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ для студентов 1 курса специальностей менеджмент и государственное и муниципальное управление**.** 1-е изд., – Коломна: КИ (ф) МГОУ, 2012, 43 с.

Учебное пособие содержит лекции по интегральному исчислению. Предназначено для студентов специальностей «менеджмент» и «государственное и муниципальное управление» технических университетов дневной формы обучения. Учебное пособие содержит теорию и большое количество решенных примеров, поэтому может быть использовано студентами при выполнении расчетно-графической работы №3.

Рассмотрено на заседании
кафедры высшей математики и физики
09.11.2011г. протокол № 3/2011

Лекция 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

В прошлом семестре мы рассмотрели следующую задачу: дана функция F(x) необходимо найти ее производную $f(x)= \ F'(x)$. Теперь будем рассматривать обратную задачу: дана производная $F'(x)=f(x)$, требуется найти саму функцию $F(x)$. С механической точки зрения это означает, что по известной скорости движения точки необходимо восстановить закон ее движения.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если во всех точках этого интервала $F(x)$ дифференцируема и $F'(x)=f(x)$.

Пример1. Найти первообразную от функции $f(x)$=x^4.

Из определения 1 следует, что $F(x)=\frac{1}{5}x^5$ является первообразной, так как $(\frac{1}{5}x^5)' = x^4$.

Теорема 1. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x)$+C тоже первообразная, где С – любое постоянное число ($C = const$).

Доказательство: $(F(x)+C)' = (F(x))' + C' = f(x)$.

Теорема 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на $(a;b)$, то $F_1(x)$ - $F_2(x) = +C$ на $(a;b)$, где $C = const$.

Доказательство: По условию $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$ для любого $x \in (a;b)$. Составим функцию $\varphi(x)=F_1(x)$ - $F_2(x)$, очевидно, что $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Но из равенства $\varphi'(x) = 0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная. Следовательно, $\varphi(x) = C$ или $F_1(x)$ - $F_2(x) = C$, что и требовалось доказать.

Из этих теорем следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где $C = const$.

Определение 2. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x)+C$, если $F'(x)=f(x)$.

При этом, знак $\int$ называют *знаком интеграла*, функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией,* выражение $f(x)$ называют *подынтегральным выражением.* Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием функции. Проинтегрировать функцию значит найти все ее первообразные.

Неопределенный интеграл представляет собой семейство функций $y = F(x) + C$. Геометрически, это семейство кривых, каждая из которых получается путем сдвига вдоль оси Oy. Эти кривые называют *интегральными кривыми* (Рис. 1).

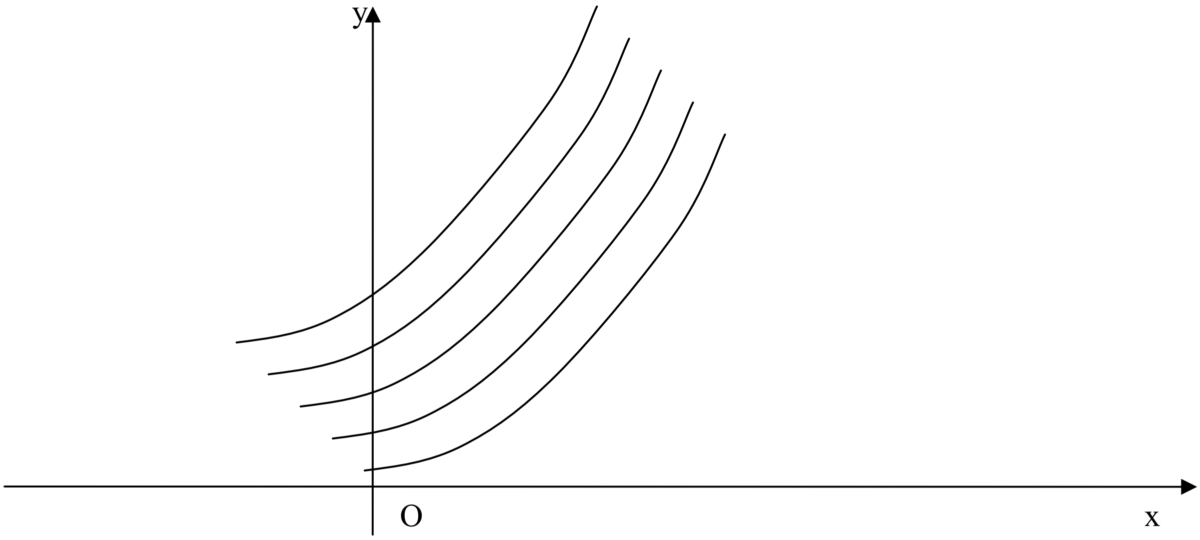

Рис. 1. Интегральные кривые.

Естественно возникает вопрос, для всякой ли функции существует первообразная. Оказывается, что если $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, то для нее существует первообразная $F(x)$ на $(a;b)$, а следовательно, и неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Действительно пользуясь определением 1, имеем $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

Свойство 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $\mathrm{d}(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

В самом деле, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда, вспоминая определение дифференциала, имеем $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$.

Свойство 3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int dF(x) = F(x) + C$.

По определению дифференциала функции $dF(x) = F'(x)fx$, тогда имеем, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

1.3. Таблица интегралов

Запишем таблицу интегралов, вытекающую из основных формул дифференцирования:

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, при $n \neq 1$.
3. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, при $x \neq 0$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, если $a \in (0;1)\bigcup(1;+\infty)$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$, $\int \cos xdx = \sin x + C$.
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C, \end{cases}$, при $x \in (-a;a)$.
8. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C, \\ -\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a} + C. \end{cases}$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|.$

Докажем формулу 3.

Так как $|x| = \begin{cases} x, если x \geq 0, \\ -x, если < 0 \end{cases}$, то при $x \neq 0$, $|x|' = \begin{cases} 1, если x \geq 0, \\ -1, если x < 0 \end{cases} = signx$, кроме того, $|x| \cdot signx = |x|\begin{cases} 1, если x \geq 0, \\ -1, если x < 0 \end{cases} = x$.

Тогда дифференцируя правую часть формулы 3 как сложную функцию, получаем $(\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{|x|}|x|' = \dfrac{1}{|x|}signx = \dfrac{1}{x}$, при $x \neq 0$.

Формула 3 доказана.

Теперь докажем еще формулу 9.

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C)' = \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 + a}|}|x + \sqrt{x^2 + a}|' = \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 + a}|}(signx + \sqrt{x^2 + a})$$

$$(x + \sqrt{x^2 + a})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a}}2x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}}\frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Следует отметить, что если операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям. Например, интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}dx$ не интегрируется в элементарных функциях.

1.4. Продолжение свойств неопределенного интеграла

Свойство 4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Доказательство. По свойству 1 $(\int (f_1(x)+f_2(x))dx)' = f_1(x)+f_2(x)$. С другой стороны $(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx)' + (\int f_2(x)dx)' = f_1(x)+f_2(x)$.

Так как производные слева и справа равны, то функции отличаются на постоянную величину. В этом смысле и следует понимать свойство 4.

Свойство 5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е., если $C = const$, то $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

Доказательство. Найдем производные от левой и правой части $(\int Cf(x)dx)'$=Cf(x), $(C\int f(x)dx)'$=C $(\int f(x)dx)' = Cf(x)$.

Производные слева и справа равны, следовательно, функции стоящие слева и справа отличаются только на постоянную величину.

1.5. Табличное интегрирование

Пример 2. Вычислить интеграл $\int (6x^2+8x+3)dx$. Применив свойство 4, получим $\int (6x^2+8x+3)dx = \int 6x^2dx + \int 8xdx + \int 3dx$. Применив свойство 5, получим $\int (6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx + 8\int xdx + 3\int dx$. Применив свойство 3, получим $\int dx = x + C$. Применив, формулу 2 таблицы интегралов окончательно получаем: $\int (6x^2+8x+3)dx = 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+5}$. Преобразуем подынтегральное выражение $\int \frac{dx}{3x^2+5} = \int \frac{dx}{3(x^2+\frac{5}{3})}$. Применив свойство 5, получим $\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}}$. К последнему интегралу применим формулу 8 таблицы интегралов, положив в ней $a^2 = \frac{5}{3}$, окончательно получаем ответ задачи

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{5}/\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}/\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-9}$.

Применив, формулу 10 таблицы интегралов, где вместо а надо подставить 3, получаем $\int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln|\frac{x-3}{x+3}|$+C=$\frac{1}{6}\ln|\frac{x-3}{x+3}|$+C.

Часто при вычислении интегралов используют прием ***подведения под знак дифференциала***. В нем используют, что $dx=\frac{1}{k}d(kx+n)$, где $k,b-$ числа.

Пример 5. . Вычислить интеграл $\int\frac{5dx}{4-x}$.

Применив свойство 4, получим $\int\frac{5dx}{4-x}=-5\int\frac{dx}{x-4}$.

Учтем, что $dx=d(x-4)$ тогда $\int\frac{5dx}{4-x}=-5\int\frac{d(x-4)}{x-4}$.

Применив, формулу 3 таблицы интегралов, где вместо x надо подставить (x-4), окончательно получаем $\int\frac{5dx}{4-x}=-5\ln|x-5|+C$.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\sqrt{2-3x}dx$.

Учтем, что $dx=-\frac{1}{3}d(2-3x)$, тогда $\int\sqrt{2-3x}dx=\int(2-3x)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{3}d(2-3x))$. Применив свойство 5, получим $\int\sqrt{2-3x}dx=$ -$\frac{1}{3}\int(2-3x)^{\frac{1}{2}}d(2-3x)$. Применив, формулу 2 таблицы интегралов, где вместо x надо подставить (2-3x), окончательно получаем $\int\sqrt{2-3x}dx=$-$\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^{3/2}}{3/2}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3}+C$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int(5x^4+e^{1-x}-\sin 2x)dx$.

Последовательно применив все выше изложенное, получаем

$$\int(5x^4+e^{1-x}-\sin 2x)dx=\int 5x^4dx+\int e^{1-x}dx-\int\sin 2xdx=5\int x^4dx+\int e^{1-x}(-d(1-x))-$$

$$\int\sin 2x(\frac{1}{2}d(2x))=5\frac{x^5}{5}-\int e^{1-x}d(1-x))-\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=$$

$$x^5-e^{1-x}\frac{1}{2}(-\cos 2x)+C=x^5-e^{1-x}+\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int 2^{3x-1}dx$.

$$\int 2^{3x-1}dx=\int 2^{3x-1}(\frac{1}{3}d(3x-1))=\frac{1}{3}\int 2^{3x-1}d(3x-1)=\frac{1}{3}\frac{2^{3x-1}}{\ln 2}+C=\frac{2^{3x-1}}{\ln 8}+C.$$

Лекция 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Метод подстановки

Рассмотрим один из сильнейших методов интегрального исчисления – метод замены переменной или подстановки.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$. Причем, непосредственно проинтегрировать мы не можем, но известно, что первообразная существует. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывна, ее производная $\varphi'(t)$ непрерывна и имеет обратную функцию. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$. В этом случае имеет место равенство

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Для доказательства найдем производные от обеих частей равенства. По свойству 1 неопределенного интеграла $(\int f(x)dx)'=f(x)$

Производную от правой части находим, считая, переменную x функцией от переменной t. Учтя, что по правилу дифференцирования обратной функции $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$ находим производную по правилу дифференцирования сложной функции $(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_x=(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_t\,\frac{dt}{dx}=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x)$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

Целесообразно выполнить подстановку $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos tdt$, а выражение подкоренное выражение принимает вид $a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2(1-stn^2t)=a^2\cos^2 t$. Тогда заданный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int\frac{a\cdot\cos t\cdot dt}{a^3\cos^3 t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}tgt+C$. Теперь надо вернуться к прежним переменным. $tgt=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{a\sin t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Следовательно,
$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ +C= $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$ +C.

<u>**Замечание**</u>: при интегрировании удобно подбирать замену не в виде $x=\varphi(t)$, а в виде $t=\psi(x)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\sin^3 x\cos xdx$.

Полагаем $t=\sin x$, тогда $dt=\cos xdx$. Заданный интеграл в новых переменных примет вид $\int\sin^3 x\cos xdx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C$. Остается лишь вернуться к прежней переменной x. $\int\sin^3 x\cos xdx=\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$

В этом примере удача подстановки $t=\sin x$ обусловлена наличием в подынтегральном выражении множителя $\cos xdx = dt$. В этой связи поучителен следующий пример.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin^3 xdx$.

В этом примере подстановка $t=\sin x$ непригодна, так как нет множителя $\cos x$. Здесь удобна подстановка $t=\cos x$, тогда $dt=-\sin xdx$, откуда $\sin xdx=-dt$. Преобразуем заданный интеграл $\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x\cdot \sin xdx = \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin xdx = \int (1-t^2)\cdot(-dt) = -\int dt + \int t^2 dt =$ t+
$-t+\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int tg2xdx.$

Преобразуем подынтегральное выражение $\int tg2xdx.=\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx$. Обозначим $\cos 2x = t$, тогда $dt=-2\sin 2xdx$, откуда $\sin 2xdx = -\frac{1}{2}dt$. Тогда заданный интеграл можно выразить в новых переменных $\int tg2xdx.=\int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t|+C$.

Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int tg2xdx.=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int 2x(x^2+1)^4 dx$.

Обозначим $x^2+1=t$, тогда $dt=2xdx$. Заданный интеграл можно выразить в новых переменных $\int 2x(x^2+1)^4 dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5}+C$. Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int 2x(x^2+1)^4 dx = \frac{1}{5}(x^2+1)^5+C.$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Обозначим $1+\sqrt{x}=t$, тогда $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, откуда $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt.$ Заданный интеграл выражаем в новых переменных $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int \frac{2dt}{\sqrt{t}} = 2\int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\frac{t^{1/2}}{1/2}+C = 4\sqrt{t}+C$.

Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Обозначим $\ln x = t$, тогда $dt=\frac{dx}{x}$. Заданный интеграл выражаем в новых переменных $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C.$ Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)+C.$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$.

Обозначим $arctgx = t$, тогда $dt = \frac{dx}{1+x^2}$. Заданный интеграл выражаем в новых переменных $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$. Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx} = \ln|arctgx| + C$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Обозначим $x^2 = t$, тогда $dt = 2xdx$, откуда $xdx = \frac{1}{2}dt$. Заданный интеграл выражаем в новых переменных $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C$.

Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$.

2.2. Метод интегрирования по частям

Пусть u=f(x) и v=g(x) две функции от x, имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = udv + vdu$, или $udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя обе части равенства, получаем $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$. Применив свойство 3 неопределенного интеграла, окончательно имеем

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям. Оно заменяет интегрирование выражения $udv = uv'dx$, интегрированием выражения $vdu = vu'dx$. Поясним это примером.

Пример 10. Найти интеграл $\int x\cos xdx$.

Положим $u = x$, а $dv = \cos xdx$, тогда $du = dx$, а $v = \int \cos xdx = \sin x$.

Замечание: в выражении v мы можем брать любую постоянную, она в конечный результат не входит, поэтому ее удобно считать равной нулю. Применив формулу интегрирования по частям, имеем $\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$.

Таким образом, интегрирование позволило заменить сложную подынтегральную функцию $x\cos x$ на простую $\sin x$. Попутно, для получения v пришлось проинтегрировать выражение $\cos xdx$ - отсюда и название : интегрирование по частям.

Применяя формулу интегрирования по частям к вычислению предложенного интеграла, приходится разбивать подынтегральное выражение на два множителя: u и dv. Из которых первый дифференцируется,

а второй интегрируется. Нужно стараться, чтобы интегрирование dv не представляло трудностей и, чтобы vdu имело более простой вид, чем udv.
При некотором навыке нет надобности, вводить обозначения u, v, и можно сразу применять формулу интегрирования по частям..

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, которые вычисляются с помощью интегрирования по частям. К ним относятся интегралы:

1). $\int x^k \sin xdx$, $\int x^k \cos xdx$, $\int x^k e^{ax} dx$, при вычислении этих интегралов полагают $u = x^k$,

2). $\int x^k \ln^m xdx$, в этом интеграле полагают $u = \ln^m x$,

3). $\int x^k arctgxdx$, в этом интеграле полагают $u = arctgx$.

Пример 11. Найти интеграл $\int x^3 \ln xdx$.

Полагаем $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$, тогда $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. По формуле интегрирования по частям вычисляем заданный интеграл

$$\int x^3 \ln xdx = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16} (4 \ln x - 1) + C.$$

Пример 12. Найти интеграл $\int arctgxdx$.

Полагаем $u = arctgx$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{!+x^2}$, $v = x$.

$$\int arctgxdx = arctgx \cdot x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, вводим переменную $t = 1 + x^2$, тогда $dt = 2xdx$, откуда $xdx = \frac{1}{2} dt$. Интеграл примет вид $\int arctgxdx = xarctgx - \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = xarctgx \quad \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = xarctgx - \frac{1}{2} \ln |t| + C$. Возвращаясь к прежним переменным, имеем $\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

Пример 13. Найти интеграл $\int x^2 \sin xdx$.

Полагаем $u = x^2$, $dv = \sin xdx$, откуда, $du = 2xdx$, $v = -\cos x$. Тогда по формуле интегрирования по частям $\int x^2 \sin xdx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2xdx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos xdx$. Полагаем $u = x$, $dv = \cos xdx$, откуда, $du = dx$, $v = \sin x$. Тогда по формуле интегрирования по частям $\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2(x \cdot \sin x - \int \sin xdx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$.

Как видим, здесь правило интегрирования по частям пришлось применить два раза. Если бы x был в кубе, то интегрировать по частям пришлось бы три раза, если x в четвертой степени , то интегрирование по частям применяют четыре раза.

Любопытный пример представляют интегралы $I_1=\int e^{ax}\cos bxdx$ и $I_2=\int e^{ax}\sin bxdx$.

Примет 14. Даны интегралы $I_1=\int e^{ax}\cos bxdx$ и $I_2=\int e^{ax}\sin bxdx$.

Применим к ним интегрирование по частям

I_1: $u=\cos bx$, $dv=e^{ax}dx$, откуда $du=-b\sin bxdx$, $v=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int e^{ax}d(ax)=\frac{1}{a}e^{ax}$.

Тогда $I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx-\int\frac{1}{a}e^{ax}(-b\sin bx)dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx$. Как видим,

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2. \qquad (1)$$

I_2: $u=\sin bx$, $dv=e^{ax}dx$, откуда $du=b\cos bxdx$, $v=\frac{1}{a}e^{ax}$.

Тогда $I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\int\frac{1}{a}e^{ax}b\cos bxdx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx$. Как видим,

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I_1. \qquad (2)$$

Таким образом, каждый из этих интегралов выражается через другой интеграл. Подставив I_1 в (2), получаем

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2\right),$$

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I_2,$$

$$I_2+\frac{b^2}{a^2}I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx,$$

$$I_2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx),$$

$$I_2\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx),$$

Окончательно $I_2=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$.

Подставив полученное выражение в формулу (1), получаем

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}=\frac{1}{a}e^{ax}\left(\cos bx+\frac{b(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}\right),$$

$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\frac{a(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$, окончательно $I_1=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$.

2.3. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

2.3.1. Пусть нам дан интеграл $I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Преобразуем квадратный трехчлен $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^2+2x\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2)=$

$a((x+\frac{b}{2a})^2+k)$, где $k=\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2$, причем k может быть как положительное, так и отрицательное число. Тогда интеграл принимает вид $I_1=\int\frac{dx}{a((x+\frac{b}{2a})^2+k)}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+k}$. Сделаем замену $t=x+\frac{b}{2a}$, тогда $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k}$.

Получили табличный интеграл (8), если $k>0$ или (10), если $k<0$.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{3x^2-2x+2}$.

$$3x^2-2x+2=3(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3})=3(x^2-2\frac{1}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3})=3((x-\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3})=$$
$$3((x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{9})=3((x-\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}).$$

Тогда, $\int\frac{dx}{3x^2-2x+2}=\int\frac{dx}{3((x-\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9})}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}$. Воспользуемся, что $dx=d(x-\frac{1}{3})$ и по формуле (8) таблицы интегралов при $a=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ имеем

$$\int\frac{dx}{3x^2-2x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-\frac{1}{3})}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{5}/3}\,arctg\frac{x-\frac{1}{3}}{\sqrt{5}/3}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

2.3.2. Интеграл $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, вычисляется таким же приемом, как и интеграл I_1.

Пример 16. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$.

Преобразуем квадратный трехчлен

$$2-3x-4x^2=-4(x^2+\frac{3}{4}-\frac{2}{4})=-4(x^2+2x\frac{3}{8}+(\frac{3}{8})^2-(\frac{3}{8})^2-\frac{2}{4})=-4((x+\frac{3}{8})^2-\frac{9}{64}-\frac{2}{4})=$$
$$-4((x+\frac{3}{8})^2-\frac{9}{64}-\frac{2}{4})=-4((x+\frac{3}{8})^2-\frac{41}{64})=4(\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2).$$

Тогда $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2}}$. Воспользуемся, что $dx=d(x+\frac{3}{8})$, и по формуле (7) таблицы интегралов при $a=\sqrt{\frac{41}{64}}=\frac{\sqrt{41}}{8}$ имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x\,\frac{3}{8})}{\sqrt{\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+\frac{3}{8}}{\sqrt{41}/8}+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C.$$

2.3.3. Интеграл вида $I_3 = \int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$ с помощью подстановки $t = ax^2+bx+c$ сводится к сумме табличного интеграла и интеграла вида I_1. Рассмотрим это на примере.

Пример 17. Вычислить интеграл $\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2-x+2}$.

Пусть $t = 5x^2-x+2$, тогда $dt = (10x-1)dx$. Преобразуем, подынтегральное выражение к такому виду, чтобы оно содержало dt.
$\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2-x+2} = \int \frac{(\frac{1}{5}(10x-1)+\frac{1}{5}-1)dx}{5x^2-x+2} = \int \frac{(\frac{1}{5}(10x-1)-\frac{4}{5})dx}{5x^2-x+2}$. Числитель поделим на знаменатель и воспользуемся свойством 4 неопределенного интеграла, что интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов, получаем
$\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2-x+2} = \int (\frac{\frac{1}{5}(10x-1)}{5x^2-x+2} - \frac{\frac{4}{5}}{5x^2-x+2})dx = \int \frac{\frac{1}{5}(10x-1)}{5x^2-x+2}dx - \int \frac{\frac{4}{5}}{5x^2-x+2}dx =$
$\frac{1}{5}\int \frac{(10x-1)dx}{5x^2-x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{5x^2-x+2}$.

Первый из этих интегралов выражается через переменную t и является табличным (формула (3) таблицы интегралов)
$\int \frac{(10x-1)dx}{5x^2-x+2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|5x^2-x+2| + C$.

Второй интеграл вида I_1. Для его вычисления в квадратном трехчлене выделим полный квадрат
$5x^2-x+2 = 5(x^2-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}) == 5(x^2-2x\frac{1}{10}+(\frac{1}{10})^2-(\frac{1}{10})^2+\frac{2}{5}) == 5((x-\frac{1}{10})^2+\frac{39}{100})$.

$$\int \frac{dx}{5x^2-x+2} = \int \frac{dx}{5((x-\frac{1}{10})^2+\frac{39}{100})} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x-\frac{1}{10})}{(x-\frac{1}{10})^2+\frac{39}{100}} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{\sqrt{39}/10}\, arctg\frac{x-\frac{1}{10}}{\sqrt{39}/10} + C =$$
$$arctg\frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C.$$

Тогда исходный интеграл равен $\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2-x+2} = \frac{1}{5}\ln|5x^2-x+2| - \frac{8}{5\sqrt{39}}\, arctg\frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$.

2.3.4. Интеграл вида $I_4 = \int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки $t = ax^2+bx+c$ сводится к сумме табличного интеграла и интеграла вида I_2. Рассмотрим это на примере.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

Пусть $t = 4x^2+4x+3$, тогда $dt = (8x+4)dx$. Преобразуем, подынтегральное выражение к такому виду, чтобы оно содержало dt.

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{4}{8}+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}.$$

Первый из этих интегралов выражается через переменную t и является табличным (формула (2) таблицы интегралов)

$$\int \frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{4x^2+4x+3} + C.$$

Второй интеграл вида I_2. Для его вычисления в квадратном трехчлене выделим полный квадрат

$4x^2+4x+3 = 4x^2+4x+1+2 = (2x+1)^2+2$. Тогда интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+2}}.$$

По формуле (9) таблицы интегралов находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{2}\ln|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+2}|+C = \frac{1}{2}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C.$$

Тогда исходный интеграл равен

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{8}\,2\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{2}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C.$$ Окончательно

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C.$$

2.3.5. Интеграл вида $I_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$.

Выделив полный квадрат и введя новую переменную, получаем интеграл, который берется по частям. Рассмотрим это на примере.

Пример 19. Вычислить интеграл $\int \sqrt{-4x^2+8x-3}dx$.

Преобразуем квадратный трехчлен

$$-4x^2+8x-3 = 4(-x^2+2x-\frac{3}{4}) = 4(-(x^2-2x)-\frac{3}{4}) = 4(-(x^2-2x+1-1)-\frac{3}{4}) =$$

$$4(-(x-1)^2+1-\frac{3}{4}) = 4(-(x-1)^2+\frac{1}{4}) = 4(\frac{1}{4}-(x-1)^2).$$

Тогда $\int \sqrt{-4x^2+8x-3}dx = \int 2\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2}\,dx = 2\int \sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2}\,dx$.

Пусть $t = x-1$, тогда интеграл примет вид

$\int \sqrt{-4x^2+8x-3}dx = 2\int \sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt$. Применим метод интегрирования по час тям.

Положим $u = \sqrt{\frac{1}{4}-t^2}$, $dv = dx$, тогда $du = \dfrac{-2tdt}{2\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}} = \dfrac{-tdt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}$, $v = t$. Применив,

формулу интегрирования по частям имеем

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} - \int t\frac{-t\,dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}.$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} - \int \frac{-t^2\,dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}.$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} - \int \frac{(\frac{1}{4}-t^2)-\frac{1}{4}dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}.$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} - \int \frac{(\frac{1}{4}-t^2)dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}} - \int \frac{-\frac{1}{4}dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}.$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} - \int \sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}.$$

$$2\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{1/2} + C.$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2t) + \frac{C}{2}.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$\int\sqrt{-4x^2+8x-3}\,dx = 2\left(\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2(x-1)) + \frac{C}{2}\right).$$

$$\int\sqrt{-4x^2+8x-3}\,dx = (x-1)\sqrt{\frac{1}{4}-x^2+2x-1} + \frac{1}{4}\arcsin(2x-2) + C.$$

$$\int\sqrt{-4x^2+8x-3}\,dx = (x-1)\sqrt{-\frac{3}{4}-x^2+2x} + \frac{1}{4}\arcsin(2x-2) + C.$$

Окончательно имеем

$$\int\sqrt{-4x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{-4x^2+8x-3} + \frac{1}{4}\arcsin(2x-2) + C.$$

Лекция 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом называется выражение

$$z = x + iy,$$

где $x, y \in R$, а символ i и называется *мнимой единицей* и определяется равенством $i^2 = -1$. При этом x называется *действительной частью* комплексного числа и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y - *мнимой частью* и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Геометрически в декартовой системе координат число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$, абсцисса и ордината которой соответственно равны действительной и мнимой частям комплексного числа. Например, комплексному числу $z = 3 - i$ соответствует точка $M(3; -1)$ (рис. 1).

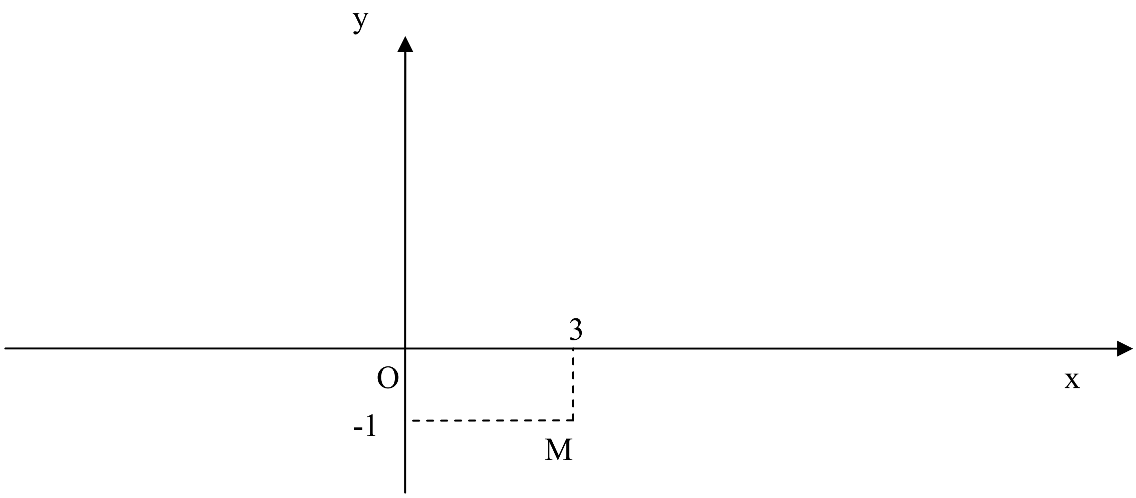

Рис. 1. Изображение комплексного числа точкой.

В общем случае между точкой $M(x; y)$ и комплексным числом $z = x + iy$ существует взаимно однозначное соответствие.

Если $y = 0$ имеем действительное число $z = x$, которому соответствует точка $M(x; 0)$ на оси Ox, поэтому ось Ox называется действительной осью. Таким образом, действительные числа есть частный случай комплексных чисел.

Если $x = 0$ имеем *чисто мнимое* число $z = iy$, которому соответствует точка $M(0; y)$ на оси Oy. Ось Oy называется мнимой осью.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *комплексно-сопряженными* или просто *сопряженными*. Они отличаются друг от друга, только знаком мнимой части.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

В частности $z = 0$, если $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Im} z. = 0$.

3.2. Арифметические операции на множестве комплексных чисел

Сумма (разность) комплексных чисел есть комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2).$$

Произведение двух комплексных чисел есть комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\ (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1\ x_2 + x_1 iy_2 + i^2 y_1 y_2 .$$

Как видим, умножение комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов.

Учтем, что $i^2 = -1$ сгруппировав действительную и мнимую часть числа, получаем

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Частное от деления двух комплексных чисел есть комплексное число, определяемое равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}.$$

Как видим, чтобы разделить комплексное число z_1 на z_2 надо числитель и знаменатель умножить на число сопряженное делителю.

Пример 1. Даны комплексные два числа $z_1 = 5 - 7i$ и $z_2 = 1 + 4i$. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (1 + 4i) = (5 + 1) + i(-7 + 4) = 6 - 3i$.

$z_1 - z_2 = (5 - 7i) - (1 + 4i) = (5 - 1) + i(-7 - 4) = 4 - 11i$.

$z_1 z_2 = (5 - 7i)\ (1 + 4i) = 5 - 7i + 20i - 28i^2 = 5 - 7i + 20i + 28 = 33 + 13i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 7i}{1 + 4i} = \frac{(5 - 7i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{5 - 7i - 20i + 28i^2}{1 - 16i^2} = \frac{5 - 7i - 20i - 28}{1 + 16} = \frac{-23 - 27i}{17} = -\frac{23}{17} - \frac{27}{17} i .$$

Рассмотренная выше запись комплексного числа $z = x + iy$ называется **алгебраической формой** комплексного числа.

3.3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Задано комплексное число $z = x + iy$. На комплексной плоскости ему соответствует точка $M(x; y)$. С каждой точкой $M(x; y)$ связан радиус-вектор этой точки $\vec{OM}$ (рис 2).

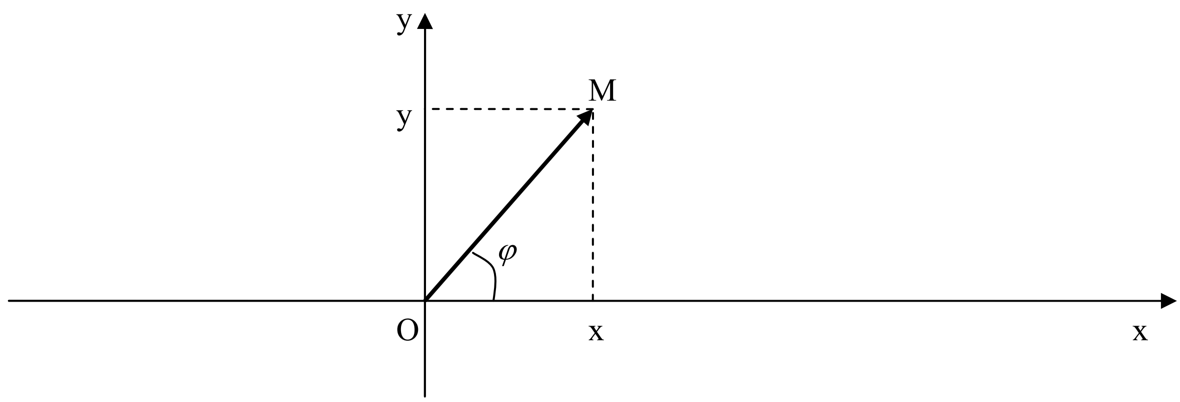

Рис. 2. Изображение комплексного числа радиус вектором

Длина радиус вектора $\vec{OM}$ называется *модулем комплексного числа* $z = x + iy$ и обозначается $|z|$ или r. Из чертежа (рис. 2) видно, что $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ, образованный радиус-вектором $\vec{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $Argz$. Из значений $\varphi = Argz$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$. $Argz = \arg z + 2\pi k$, где $k = 0;\pm1;\pm2;\dots$.

Следует помнить, что $\varphi > 0$, если φ отсчитывается от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки, и $\varphi < 0$ при противоположном отсчете.

Из чертежа (рис. 2) видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Эту запись называют **тригонометрической формой** комплексного числа.

Связь между тригонометрическими и показательными функциями выражается *формулой Эйлера* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Отсюда следует **показательная форма** записи комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Представить их в тригонометрической и показательной форме.

Возьмем первое число $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, его модуль равен $r_1 = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Аргумент определяем из равенства $tg\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

Так как, точка $M_1(1;\sqrt{3})$, соответствующая числу $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ расположена в первой четверти (см. рис. 3), то $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Тогда тригонометрическая форма числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ будет $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, а показательная - $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

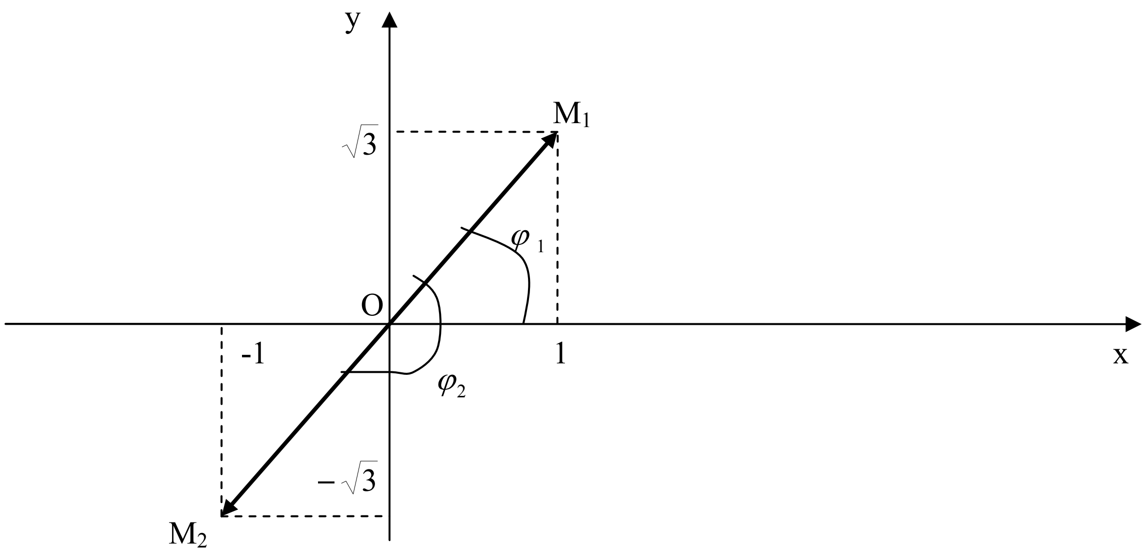

Рис. 3. Изображение комплексных чисел примера 2.

Для второго числа $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $r_2 = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $tg\varphi_2 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$. И так как, точка $M_2(-1;-\sqrt{3})$, соответствующая числу $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ расположена в третьей четверти (см. рис. 3), то $\varphi_2 = -\frac{2\pi}{3}$ (т.к. $-\pi < \varphi \le \pi$). Тогда тригонометрическая форма числа $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ будет $z_2 = 2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})$_, а показательная - $z_1 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Операции умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня удобнее производить над комплексными числами не в алгебраической, а в тригонометрической и показательной форме.

3.4. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ есть комплексное число, определяемое формулой $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, или $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Как видим*, при перемножении модули комплексных чисел умножаются, а аргументы складываются.*

Частное от деления комплексного числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, на комплексное число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ есть комплексное число, определяемое формулой $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, или $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

При делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Возведение в степень. Если n целое число, то $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ или $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

При возведении в степень комплексного числа возводится в эту степень его модуль, а аргумент умножается на показатель степени.

Извлечение корня. Если n целое число, то корень из комплексного числа извлекается по формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, или $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, где $k = 0; \pm1; \pm2; ...; (n-1)$. Итак, чтобы извлечь корень n-ой степени из комплексного числа, нужно извлечь арифметический корень этой степени из модулю, а его общее значение аргумента $Argz = \arg z + 2\pi k = \varphi + 2\pi k$ разделить на степень корня. Следовательно, извлечение корня комплексного числа – действие многозначное. Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 3. Найти $(\sqrt{3} + i)^4$.

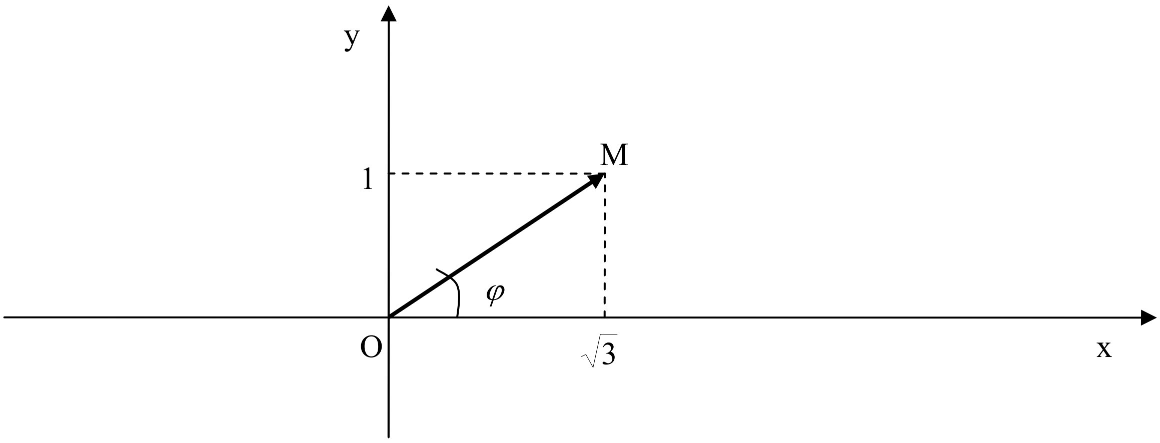

Рис. 4. Изображение комплексного числа примера 3.

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} + i$, $|z| = r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка $M_1(\sqrt{3};1)$, соответствующая числу $z = \sqrt{3} + i$ расположена в первой четверти (см. рис. 4), этому соответствует $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z^4 = (\sqrt{3} + i)^4 = 2^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}} = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Пример 4. Дано комплексное число $a = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}}$. Требуется: 1). Записать число a в алгебраической и тригонометрической форме. 2). Найти все корни уравнения $z^3 + a = 0$.

а). Запишем a в алгебраической форме $a=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\dfrac{4(1-i\sqrt{3})}{(1)^2-(i\sqrt{3})^2}=\dfrac{4(1-i\sqrt{3})}{1+3}=1-i\sqrt{3}$. Запишем a в тригонометрической форме $r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $tg\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$. И так как точка $M(1;-\sqrt{3})$, соответствующая числу $a=1-i\sqrt{3}$ расположена в четвертой четверти (см. рис. 5), то $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$ (т.к. $-\pi<\varphi\le\pi$). Следовательно, $a=2(\cos(-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi}{3})$.

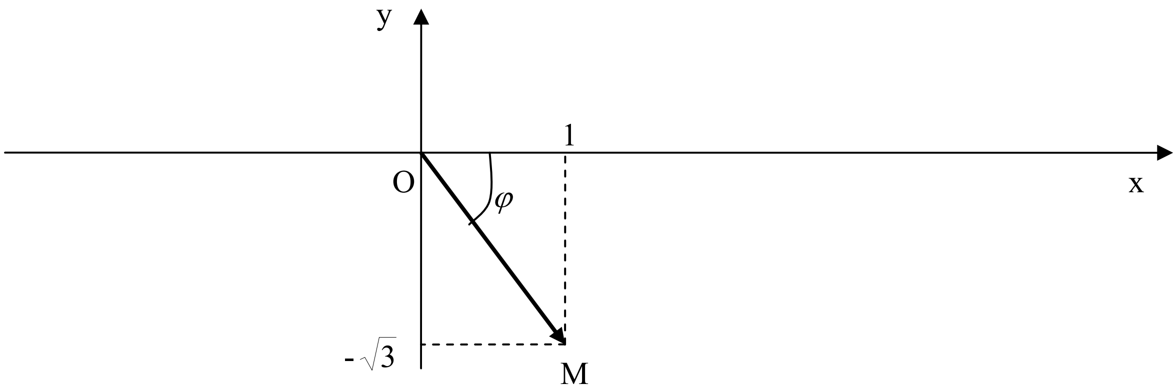

Рис. 5. Изображение комплексного числа примера 5(а)

б). Решим уравнение $z^3+a=0$. $z=\sqrt[3]{-a}$.

Запишем число $-a=-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. Модуль числа $-a$ равен $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$, а его аргумент определяем из равенства $tg\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ и так как точка $M(-1;\sqrt{3})$, соответствующая числу $-a$ расположена в третьей четверти (см. рис. 6), то $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ (т.к. $-\pi<\varphi\le\pi$). Следовательно, в тригонометрической форме $-a=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$. Поэтому

$$z=\sqrt[3]{-a}=\sqrt[3]{2}\ (\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}),\text{ где } k=0,1,3.$$

При $k=0$ $z_0=\sqrt[3]{2}\ (\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{9}}$.

При $k=1$ $z_1=\sqrt[3]{2}\ (\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\ (\cos\dfrac{8\pi}{9}+i\sin\dfrac{8\pi}{9})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{8\pi}{9}}$.

При $k=2$ $z_2=\sqrt[3]{2}\ (\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\ (\cos\dfrac{14\pi}{9}+i\sin\dfrac{14\pi}{9})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

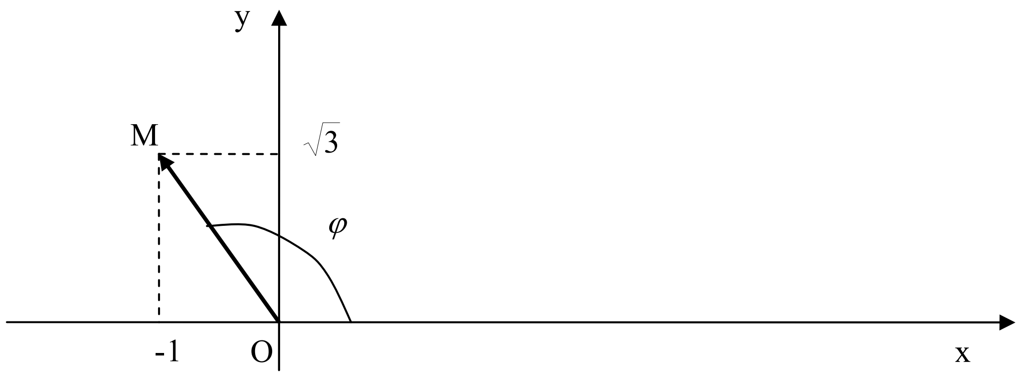

Рис. 6. Изображение комплексного числа примера 5(б)

Лекция 4. Интегрирование рациональных функций

4. 1. Разложение многочлена на множители

Функция $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, где $n \in N$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in R$ называется *многочленом степени* n относительно x.

<u>Определение</u>. *Корнем* многочлена называется такое значение k, при котором многочлен обращается в ноль, т.е. $P_n(k)=0$.

Теорема 1. Если, k есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делится без остатка на выражение $(x-k)$ и многочлен можно представить в виде произведения $P_n(x) = (x-k)\, P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ многочлен степени $n-1$ относительно x.

Пример 1. Дан многочлен $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

$P_3(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 11\cdot 1 - 6$=1-6+11-6=0.

Следовательно, $x = 1$ является корнем заданного многочлена, поэтому он делится без остатка на выражение $(x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \;x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2 \quad\quad\quad} & \;x^2 - 5x + 6 \\
-5x^2 + 11x - 6 & \\
\underline{-5x^2 + 5x \quad\;} & \\
6x - 6 & \\
\underline{6x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Тогда $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\,(x^2 - 5x + 6)$.

Теорема 2. Всякий многочлен n-ной степени раскладывается на n множителей вида $(x-k)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n, то есть имеет вид $P_n(x) = a_n\,(x-k_1)\,(x-k_2)\ldots(x-k_n)$.

Разложение показывает, что числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и только они являются корнями многочлена $P_n(x)$ и что, следовательно, многочлен n-ной степени не может иметь более чем n корней.

Среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ могут быть повторяющиеся числа. Если объединить множители, соответствующие повторяющимся корням, то разложение примет вид $P_n(x) = a_n\,(x-k_1)^{m_1}\,(x-k_2)^{m_2}\ldots(x-k_l)^{m_l}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_l\,(\,l < n\,)$ – попарно различные корни многочлена $P_n(x)$. Показатели степени $m_1, m_2, \ldots, m_l$ называются кратностями коней соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_l$.

Легко видеть, что $m_1+m_2+\ldots+m_l=n$. Таким образом, сумма кратностей попарно различных корней равна степени многочлена.

Определение. Число k называется m-кратным корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-k)^m$ и не делится на высшую степень разности $(x-k)$.

Пример 2. Дан многочлен $P_3(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

Его можно разложить на простые множители $P_3(x)=(x-2)\,(x-2)\,(x-1)$ или $P_3(x)=(x-2)^2\,(x-1)$. Это означает, что k_1=2 является двукратным корнем, k_2=1 – однократным или простым корнем заданного многочлена.

Выберем среди всех попарно различных корней $k_1,k_2,\ldots,k_l$ многочлена $P_n(x)$ действительные корни. Пусть это будут корни $k_1,k_2,\ldots,k_s$ с кратностями $m_1,m_2,\ldots,m_s\,(s\le l)$. Тогда разложение можно записать в виде $P_n(x)=a_n\,(x-k_1)^{m_1}\,(x-k_2)^{m_2}\ldots(x-k_l)^{m_s}\,p(x)$, где $p(x)$ - многочлен с действительными коэффициентами, имеющий комплексные корни.

Теорема 3. Комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами встречаются только сопряженными парами, причем сопряженные корни имеют одинаковую кратность.

Таким образом, если $z_0=\alpha+i\beta$ является корнем многочлена $p(x)$, то $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ - тоже корень этого многочлена. Кроме того, согласно теореме 3 в разложении многочлена $p(x)$ скобки $(x-z_0)$ и $(x-\overline{z}_0)$ встречаются в одинаковых степенях $p(x)=\ldots(x-z_0)^{\mu}\,(x-\overline{z}_0)^{\mu}\ldots$. Перемножим эти скобки
$(x-z_0)^{\mu}\,(x-\overline{z}_0)^{\mu}=((x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta))^{\mu}=$
$(x^2-x\alpha-i\beta x-\alpha x+\alpha^2+i\beta\alpha+ix\beta-i\alpha\beta-i^2\beta^2)^{\mu}$. Учтем что $i^2=-1$.
$(x-z_0)^{\mu}\,(x-\overline{z}_0)^{\mu}=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{\mu}$.

Пусть $-2\alpha=p$, а $\alpha^2+\beta^2=q$. Тогда $(x-z_0)^{\mu}\,(x-\overline{z}_0)^{\mu}=(x^2+px+q)^{\mu}$, где x^2+px+q есть квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, имеющий комплексные корни. Остальным парам комплексно сопряженных корней будут соответствовать такие же квадратные трехчлены. Тогда можно записать, что $p(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{\mu_r}$.

Окончательно разложение многочлена с действительными коэффициентами запишем в виде
$P_n(x)=a_n\,(x-k_1)^{m_1}\,(x-k_2)^{m_2}\ldots(x-k_l)^{m_s}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{\mu_r}$.
При этом, $m_1+m_2+\ldots+m_l+2\mu_1+\ldots+2\mu_r=n$

4.2. Интегрирование рациональных функций

Всякую рациональную функцию $f(x)$ можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения многочленов: $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, где $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0,b_m,b_{m-1},\ldots,b_1,b_0\in R$.

Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае *неправильной*.

Если дробь неправильная, то разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов) можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби.

Пример 3. Пусть дана неправильная дробь $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$.

Разделим числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x^4-8 & \underline{x^3-4x} \\
\underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\
x^4+4x^3-8 & \\
\underline{x^4-4x^2} & \\
4x^3+4x^2-8 & \\
\underline{4x^3-16x} & \\
4x^2+16x-8 &
\end{array}
$$

Тогда заданную дробь можно записать в виде:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных функций заключается в интегрировании правильных дробей. Остановимся сначала на так называемых простых дробях.

4.3. Интегрирование простых дробей

Простыми дробями называют дроби следующих четырех типов:

$I.\ \dfrac{A}{x-a}$,

$II.\ \dfrac{A}{(x-a)^k}$,

$III.\ \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$,

$IV.\ \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

где $A,B,a,p,q\in R$, а квадратный трехчлен x^2+px+q имеет только комплексные корни (его дискриминант $\dfrac{D}{4}=\dfrac{p^4}{4}-q<0$), т.е. не раскладывается на множители вида $(x-a)$.

Дроби вида I, II мы умеем интегрировать

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Дроби вида III мы интегрировали на предыдущей лекции.

Рассмотрим интеграл от простой дроби IV.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Пусть $x^2+px+q=t$, тогда $dt=(2x+p)dx$. Преобразуем интеграл.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{-\frac{Ap}{2}+B}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$\frac{A}{2}\int \frac{dt}{t^k} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Вычислим полученные интегралы.

$$\int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{A}{2}\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{A}{2(k-1)t^{k-1}} + C = -\frac{A}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $x^2+px+q = x^2+2x\frac{p}{2}+(\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2+q = (x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2+q$. Введем переменную $z=x+\frac{p}{2}$, тогда $dx=dz$. Так как дискриминант $\frac{D}{4}=\frac{p^4}{4}-q<0$, то $-\frac{p^4}{4}+q>0$ и можно обозначить $-\frac{p^4}{4}+q=a^2$. Тогда, $x^2+px+q=z^2+a^2$. Следовательно,

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^k}$. Вычислим последний интеграл

$I_k = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^k} = \int \frac{\frac{1}{a^2}((z^2+a^2)-z^2)dz}{(z^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(z^2+a^2)dz}{(z^2+a^2)^k} - \frac{1}{a^2}\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$. Ко второму интегралу $\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ применим метод интегрирования по частям. Пусть $u=z$, $dv=\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}$, тогда $du=dz$,

$$v=\int \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (z^2+a^2)^{-k}d(z^2+a^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(z^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} =$$

$$\frac{-1}{2(k-1)(z^2+a^2)^{k-1}}.$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{(z^2+a^2dz}{(z^2+a^2)^k} - \frac{1}{a^2}(z\cdot\frac{-1}{2(k-1)(z^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}).$$

$I_k = \cdot\frac{z}{2a^2(k-1)(z^2+a^2)^{k-1}} + (\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2(k-1)})\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}$. В правой части стоит интеграл того же типа, что и I_k, но степень знаменателя подынтегральной функции на единицу меньше. Обозначим его символом I_{k-1}.

$I_k = \cdot \frac{z}{2a^2(k-1)(z^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1}$. Продолжая, аналогичные преобразования найдем интеграл $I_1 = \int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a} + C$. Затем, останется лишь вернуться к прежним переменным.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx$.

Пусть $t = x^2 - x + 1$, тогда $dt = (2x-1)dx$.

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{(x^2-x+1)^2} dx.$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1)^2} = \int \frac{dx}{((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})^2} = |\, z = x - \frac{1}{2}, dz = dx \,| = \int \frac{dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{3}(z^2 + \frac{3}{4} - z^2)dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2} = \int \frac{\frac{4}{3}(z^2+\frac{3}{4})dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2} + \int \frac{\frac{4}{3}(-z^2)dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\int \frac{z^2 dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2}.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям. Пусть $u = z$, $dv = \frac{zdz}{(z^2+\frac{3}{4})^2}$, тогда $du = dz$,

$$v = \int \frac{zdz}{(z^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+\frac{3}{4})}{(z^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{2}\int (z^2+\frac{3}{4})^{-2} d(z^2+\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(z^2+\frac{3}{4})^{-1}}{-1} = \frac{-1}{2(z^2+\frac{3}{4})}.$$

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2} = z\,\frac{-1}{2(z^2+\frac{3}{4})} - \int \frac{-1}{2(z^2+\frac{3}{4})} dz = \frac{-z}{2(z^2+\frac{3}{4})} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}.$$

Тогда получаем, что

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\left(\frac{-z}{2(z^2+\frac{3}{4})} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}\right) = \frac{2z}{3(z^2+\frac{3}{4})} + \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} = \frac{2z}{3(z^2+\frac{3}{4})} +$$

$$\frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2z}{\sqrt{3}} + C = \frac{2(x-\frac{1}{2})}{3((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} + \frac{4}{3\sqrt{3}} arctg \frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C = \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} +$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Тогда, учитывая все выполненные преобразования можно сделать вывод, что заданный интеграл равен

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{-2(x-1)}{3(x^2-x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4.4. Интегрирование правильных дробей

Итак, интегрировать простые дроби мы умеем. Интегрирование правильных дробей основывается на следующей важной теореме, которая доказывается в курсе алгебры.

Теорема 4. Каждая правильная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.

Это разложение правильной дроби на простые дроби теснейшим образом связано с разложением ее знаменателя на простые множители. Как известно каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде

$$Q_m(x) = b_m\,(x-k_1)^{m_1}\,(x-k_2)^{m_2}\ldots(x-k_l)^{m_s}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_{11}}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{\mu_r},$$

где $k_1, k_2, ..., k_l$ - действительные корни многочлена $Q_m(x)$, а квадратные трехчлены $(x^2 + p_i x + q_i)$ $(i = \overline{1;r})$ не имеют действительных корней, кроме того, $l, r, m_1, m_2, ..., m_l, \mu_1, ..., \mu_r \in N$ и $m_1 + m_2 + ... + m_l + 2\mu_1 + ... + 2\mu_r = m$.

В алгебре устанавливается, что каждому множителю вида $(x-k_i)^{m_{i2}}$ в разложении знаменателя правильной дроби соответствует группа из m_i дробей

$$\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}},$$

а каждому множителю вида $(x^2 + p_i x + q_i)^{\mu_i}$ - соответствует группа из μ_i простых дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{M_{\mu_i}x+N_{\mu_i}}{(x^2+p_{\mu_i}x+q_{\mu_i})^{\mu_i}},$$

Причем, A_i, M_i, N_i здесь числовые коэффициенты. Таким образом, зная разложение знаменателя $Q_m(x)$ правильной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простые множители, мы тем самым знаем знаменатели тех простых дробей, на которые она раскладывается.

Для определения коэффициентов A_i, M_i, N_i обычно используют метод неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем. Зная форму разложения дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, пишут все с буквенными коэффициентами в числителях. Общим знаменателем всех простых дробей, очевидно, будет $Q_m(x)$. Приведя к общему знаменателю эти простые дроби, в числителе получим многочлен с буквенными коэффициентами. Он должен быть равен числителю $P_n(x)$ дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Приравняв в этих двух многочленах коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему линейных уравнений. Из полученной системы определяем неизвестные коэффициенты. Поясним сказанное примером.

Пример 5. Разложить правильную дробь $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ на простые дроби.

В соответствии со сказанным выше

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приведем дроби, стоящие справа к общему знаменателю

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Раскроим скобки в числителе дроби стоящей справа

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)(x^3-2x^2+x-2)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{x^4(A+B)+x^3(C-2B)+x^2(2A+B-2C+D)+x(-2B+C-2D+E)+A-2C-2E}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если равны их числители

$$2x^2+2x+13=$$

$$(A+B)x^4+(C-2B)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+(-2B+C-2D+E)x+A-2C-2E.$$

Два многочлена равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях. В результате получаем систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-2B=0, \\ 2A+B-2C+D=2, \\ -2B+C-2D+E=2, \\ A-2C-2E=13. \end{cases}$$ Рушим эту систему.

$$\begin{cases} A=-B, \\ C=2B, \\ -2B+B-4B+D=2, \\ -2B+2B-2D+E=2, \\ -B-4B-2E=13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B, \\ C=2B, \\ D=2+5B, \\ -4-10B-\frac{13+5B}{2}=2, \\ E=\frac{13+5B}{-2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B, \\ C=2B, \\ D=2+5B, \\ -4-10B-\frac{13+5B}{2}=2, \\ E=\frac{13+5B}{-2}. \end{cases}$$

Окончательно находим неизвестные коэффициенты $A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=4$. Тогда заданная дробь равна

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{-x-2}{x^2+1}+\frac{-3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$.

Подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Разделим числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^3+3x^2-5 & \underline{x^3+3x^2+3x+1} \\ \underline{x^4+3x^3+3x^2+x} & \quad x \\ \quad -x-5 & \end{array}$$

Тогда можно записать, что $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int (x + \frac{-x-5}{x^3+3x^2+3x+1})dx = \int xdx + \int \frac{(-x-5)dx}{(x+1)^3}$.

В последнем интеграле подынтегральная функция представляет собой правильную дробь. Разложим ее на простые дроби.

$\frac{-x-5}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$. Приведем дроби, стоящие справа к общему знаменателю $\frac{-x-5}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$. Раскроим скобки в числителе дроби стоящей справа $\frac{-x-5}{(x+1)^3} = \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx+B+C}{(x+1)^3}$. Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если равны их числители, следовательно, $-x-5 = Ax^2 + (2A+B)x + A+B+C$. Два многочлена равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} A = 0, \\ 2A + B = -1 \\ A + B + C = 5. \end{cases}$$

Рушим систему

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = -1 \\ C = -4. \end{cases}$$

Тогда $\frac{-x-5}{(x+1)^3} = \frac{0}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-4}{(x+1)^3} = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^3}$.

Заданный интеграл равен:

$$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int xdx - \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 4\int \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{x^2}{2} - \int (x+1)^{-2} d(x+1)$$

$$-\int (x+1)^{-3} d(x+1) = \frac{x^2}{2} - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} - \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C.$$

$$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

Лекция 5. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

5.1. Общий случай

Как известно, все тригонометрические функции рационально выражаются через синус и косинус($tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos ecx = \frac{1}{\sin x}$). Следовательно, всякая функция, рационально зависящая от тригонометрических функций, может быть преобразована в функцию только синуса и косинуса. Поэтому достаточно рассмотреть только функции такого типа.

Пусть требуется вычислить интеграл вида: $\int R(\sin x, \cos x)dx$, подынтегральная функция R является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$. Применим подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1/\cos^2 x} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - tg^2\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1/\cos^2 x} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\,(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t)dt$, где $r(t) = R\,(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}$ есть рациональная функция от переменной t.

Подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку

$t = tg\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{2t-1+t^2} = 2\int\frac{dt}{t^2+2t+1-2} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2-2} =$$

$$2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-2} = 2\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

В некоторых случаях, подынтегральное выражение $R(\sin x, \cos x)dx$ можно привести к рациональной функции с помощью иных подстановок, чем универсальная тригонометрическая подстановка. Рассмотрим несколько из этих случаев.

5.2. Частные случаи

5.2.1. Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетная функция относительно $\sin x$, то есть, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = \cos x$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I_1 = \int \frac{(1-2\cos x)dx}{\sin x(tg^2 x + 4\cos ec^2 x)}$.

Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$.
Положим $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x dx$.
Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{(1-2\cos x)dx}{\sin x(tg^2 x + 4\cos ec^2 x)} = \frac{(1-2\cos x)\sin x dx}{\sin^2 x(tg^2 x + 4\cos ec^2 x)} = \frac{(2\cos x - 1)(-\sin x dx)}{\sin^2 x(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{1}{\sin^2 x})} =$$

$$\frac{(2\cos x - 1)(-\sin x dx)}{\frac{\sin^4 x + 4\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x(2\cos x - 1)(-\sin x dx)}{(\sin^2 x)^2 + 4\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x(2\cos x - 1)(-\sin x dx)}{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} =$$

$$\frac{t^2(2t-1)dt}{(1-t^2)^2 + 4t^2} = \frac{t^2(2t-1)dt}{1-2t^2+t^4+4t^2} = \frac{(2t^3-t^2)dt}{1+2t^2+t^4}.$$

$$I_1 = \int \frac{(2t^3-t^2)dt}{(t^2+1)^2}.$$

5.2.2. Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетная функция относительно $\cos x$, то есть, если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = \sin x$.

Пример 3. Вычислить интеграл $I_2 = \int \frac{ctg^3 x(2+\sin x)dx}{1-\sin x}$.

Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$.
Положим $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$.
Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{ctg^3 x(2+\sin x)dx}{1-\sin x} = \frac{\cos^3 x(2+\sin x)dx}{\sin^3 x(1-\sin x)} = \frac{\cos^2 x\cos x(2+\sin x)dx}{\sin^3 x(1-\sin x)} =$$

$$\frac{(1-\sin^2 x)(2+\sin x)\cos x dx}{\sin^3 x(1-\sin x)} = \frac{(1-t^2)(2+t)dt}{t^3(1-t)} = \frac{(1+t)(2+t)dt}{t^3}.$$

Тогда

$$I_2 = \int \frac{(2+3t+t^2)dt}{t^3} = \int (2t^{-3} + 3t^{-2} + \frac{1}{t})dt = 2\frac{t^{-2}}{-2} + 3\frac{t^{-1}}{-1} + \ln|t| + C = -\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + \ln|t| + C =$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + \ln|\sin x| + C.$$

5.2.3. Если $R(\sin x, \cos x)$ четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = tgx$.

Пример 4. Вычислить интеграл $I_3 = \int \frac{\cos ec^2 x dx}{tg^2 x + \sec^2 x}$.

Подынтегральная функция четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$. Применим подстановку $t = tgx$, тогда $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{\cos ec^2 x dx}{tg^2 x + \sec^2 x} = \frac{\cos ec x^2 dx}{tg^2 x + \sec^2 x} = \frac{dx}{\sin^2 x(tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 x})} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x(tg^2 x + 1 + tg^2 x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{1}{tg^2 x(2tg^2 x + 1)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{t^2(2t^2+1)} \cdot dt.$$ Тогда заданный интеграл равен $I_3 = \int \frac{dt}{t^2(2t^2+1)}$.

5.3. Интегрирование целых степеней тригонометрических функций

В случае, когда подынтегральная функция представляет собой целую степень тригонометрической функции или произведение целых степеней тригонометрических функций, пользоваться универсальной тригонометрической подстановкой нецелесообразно. В этом случае применяют простые приемы, основанные на использовании формул тригонометрии и общих методов интегрирования. Рассмотрим эти приемы.

5.3.1. Интеграл от нечетной положительной степени синуса и косинуса.

$\int \sin^{2m+1} x dx$, где $m \in N$ вычисляют с помощью подстановки $t = \cos x$.

$\int \cos^{2m+1} x dx$, где $m \in N$ вычисляют с помощью подстановки $t = \sin x$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin^5 x dx$.

Пусть $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x dt$, откуда $\sin x dt = -dt$. $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx =$

$$\int (1-t^2)^2(-dt) = -\int (1 - 2t^2 + t^4)dt = -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + C.$$

5.3.2. Интеграл от четной положительной степени синуса и косинуса.

$\int \sin^{2m} x dx$, где $m \in N$ вычисляют с использованием формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. $\int \cos^{2m} x dx$, где $m \in N$ вычисляют с использованием формулы понижения степени $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x dx$.

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}(1+\cos 2x))^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$
$$\frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x +$$
$$\frac{1}{8}\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C.$$

5.3.3. Интеграл от произведения целых положительных степеней синуса и косинуса.

Приемы интегрирования целой положительной степени синуса и косинуса, изложенные в пунктах 1 и 2, достаточны для интегрирования произведения таких степеней. Поясним это примерами.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos^7 x dx$.

Подынтегральная функция содержит нечетную степень $\cos x$, поэтому применим прием, изложенный в пункте 2.

Пусть $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$.

$$\int \sin^4 x \cos^7 x dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x dx = \int \sin^4 x (\cos^2 x)^3 \cos x dx =$$
$$\int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^3 \cos x dx = \int t^4 (1-t^2)^3 dt = \int t^4 (1-3t^2+3t^4-t^6)dt = \int (t^4 - 3t^6 + 3t^8 - t^{10})dt =$$
$$\frac{t^5}{5} - \frac{3t^7}{7} + \frac{3t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{3\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{3} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Замечание. Если подынтегральная функция содержит нечетную степень $\sin x$, применяют прием, изложенный в пункте 1.

5.3.4. Интеграл от нечетной отрицательной степени синуса и косинуса.

$$I_{2m+1} = \int \frac{1}{\sin^{2m+1} x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^{2m+1} x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^{2m+1} x}dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^{2m+1} x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2m-1} x}dx +$$
$$\int \frac{\cos x}{\sin^{2m+1} x}\cos x dx.$$

Обозначим первый интеграл $\int \frac{1}{\sin^{2m-1} x}dx = I_{2m-1}$, а ко второму интегралу применим формулу интегрирования по частям.

Пусть $u = \cos x$, $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^{2m+1} x}$, тогда $du = -\sin x dx$,

$$v = \int \frac{\cos x dx}{\sin^{2m+1} x} = \int \sin^{-2m-1} d(\sin x) = \frac{\sin^{-2m} x}{-2m} = -\frac{1}{2m\sin^{2m} x}.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int \frac{\cos x}{\sin^{2m+1} x}\cos x dx = -\frac{\cos x}{2m\sin^{2m} x} - \int \frac{-\sin x dx}{-2m\sin^{2m} x} = -\frac{\cos x}{2m\sin^{2m} x} - \frac{1}{2m}\int \frac{dx}{\sin^{2m-1} x} =$$
$$-\frac{\cos x}{2m\sin^{2m} x} - \frac{1}{2m} I_{2m-1}.$$

Тогда исходный интеграл равен $I_{2m+1}=I_{2m-1}-\frac{\cos x}{2m\sin^{2m}x}-\frac{1}{2m}I_{2m-1}$. Значит $I_{2m+1}=-\frac{\cos x}{2m\sin^{2m}x}+\frac{2m-1}{2m}I_{2m-1}$.

Получена рекуррентная формула. Последовательно применяя эту формулу, получим выражение I_{2m-1} через I_{2m-2}, I_{2m-2} - через I_{2m-3} и т. д., наконец, I_2 выразим через $I_1=\int\frac{dx}{\sin x}$.

Для вычисления I_1, применим универсальную тригонометрическую подстановку $t=tg\frac{x}{2}$, тогда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. $I_1=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$.

Как видим, $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln|tg\frac{x}{2}|+C$. Аналогично вычисляется интеграл $\int\frac{1}{\cos^{2m+1}x}dx$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\frac{1}{\cos^5 x}dx$.

$$I_5=\int\frac{1}{\cos^5 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^5 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\cos^5 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}\sin xdx+\int\frac{1}{\cos^3 x}dx.$$

К интегралу $\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}\sin xdx$ применим формулу интегрирования по частям. Пусть $u=\sin x$, $dv=\frac{\sin xdx}{\cos^5 x}$, тогда $du=\cos xdx$,

$$v=\int\frac{\sin xdx}{\cos^5 x}=-\int\cos^{-5}d(\cos x)=-\frac{\cos^{-4}x}{-4}=\frac{1}{4\cos^4 x}.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}\sin xdx=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}-\int\frac{\cos xdx}{4\cos^4 x}=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^3 x}.$$ Тогда

$$I_5=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^3 x}+\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{4}I_3.$$

Вычислим

$$I_3=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos^2 xdx}{\cos^3 x}+\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^3 x}=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\sin x\sin xdx}{\cos^3 x}.$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям.

Пусть $u=\sin x$, $dv=\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$, тогда $du=\cos xdx$,

$$v=\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}=-\int\cos^{-3}d(\cos x)=-\frac{\cos^{-2}x}{-2}=\frac{1}{2\cos^2 x}.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int\frac{\sin x\sin xdx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\int\frac{\cos xdx}{2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}.$$ Тогда

$$I_3=\int\frac{dx}{\cos x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}I_1.$$

$$I_5=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}I_1\right)=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}I_1.$$

Осталось вычислить I_1. Используем полученный выше интеграл $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|tg\frac{x}{2}| + C$ и то, что $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C$. Окончательно

$\int \frac{1}{\cos^5 x}dx = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C$.

5.3.5. Интеграл от четной отрицательной степени синуса и косинуса

$\int \frac{dx}{\cos^{2m} x}$ вычисляется с помощью подстановки $t = tgx$.

$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x}$ вычисляется с помощью подстановки $t = ctgx$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$.

$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+tg^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$. Пусть $t = tgx$, тогда $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C$.

5.3.6. Интеграл от целой положительной степени тангенса и котангенса

Вычислим интеграл вида $I_n = \int tg^n xdx$, где $n \in N$.

$I_n = \int tg^{n-2}xtg^2 xdx = \int tg^{n-2}x(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int tg^{n-2}x\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int tg^{n-2}xdx = \int tg^{n-2}xd(tgx)$

$- I_{n-2} = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$. Получена рекуррентная формула $I_n = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$.

Последовательно применяя полученную формулу, найдем выражение I_{n-2} через интеграл I_{n-4}, I_{n-4} через интеграл I_{n-6} и т.д., пока не придем к табличному интегралу $I_0 = \int dx = x + C$, если n было четным, или к интегралу $I_1 = \int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$, если n было нечетным.

Аналогично вычисляется интеграл вида $\int ctg^n xdx$, где $n \in N$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int ctg^4 xdx$.

$\int ctg^4 xdx = \int ctg^2 xctg^2 xdx = \int ctg^2 x(\frac{1}{\sin^2 x} - 1)dx = \int ctg^2 x\frac{1}{\sin^2 x}dx - \int ctg^2 xdx =$

$-\int ctg^2 xd(ctgx) - \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1)dx = -\frac{ctg^3 x}{3} + ctgx + x + C$.

5.4. Интегралы от произведения синусов и косинусов

Интегралы вида $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$ Вычисляются при помощи следующих формул

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)),$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)),$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}(-\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)).$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \sin(5x)\sin(3x)dx$

$$\int \sin(5x)\sin(3x)dx = \frac{1}{2}\int(-\cos(8x) + \cos(2x))dx = -\frac{1}{16}\sin(8x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Лекция 6. Интегралы от иррациональных функций

6.1. Интегрирование алгебраических иррациональностей

Пусть дан интеграл вида $\int R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{k_1}{n_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{k_2}{n_2}},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{k_m}{n_m}})dx$, где R - символ рациональной зависимости, $a,b,c,d \in (-\infty;+\infty)$, $k_1,k_2,...,k_m,n_1,n_2,...,n_m,m \in N$.

Как видим, подынтегральная функция является рациональной функцией от аргумента x и нескольких дробных степеней одной и той же дробно-линейной функции этого аргумента x.

Вычисление интегралов этого вида выполняют с использованием подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^B$, где $B = НОК\ (n_1,n_2,...,n_m)$.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})}$.

Здесь $a=1,b=c=0,d=1$ и роль дробно линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$ играет сам аргумент x, $n_1=3,n_2=5.$, тогда $B = НОК$ (3;5)=15. Следовательно, применим подстановку $x=t^{15}$, тогда $\sqrt[3]{x}=t^5, \sqrt[5]{x}=t^3$. $dx=15t^{14}dt$.

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})}=\int \frac{15t^{14}dt}{t^{15}(t^5+t^3)}=15\int \frac{dt}{t^4(t^2+1)}.$$

Таким образом, получили интеграл от рациональной функции, который вычисляем методами, изложенными в лекции 4.

Пример 2. Вычислить $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+3}}\frac{dx}{x}$.

Применим подстановку $\frac{x+2}{x+3}=t^3$, тогда $x=\frac{3t^3-2}{1-t^3}$,

$$dx=\frac{9t^2(1-t^3)+3t^2(3t^3-2}{(1-t^3)^2}dt=\frac{9t^2-9t^5+9t^5-6t^2}{(1-t^3)^2}dt==\frac{3t^2}{(1-t^3)^2}dt.$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+3}}\frac{dx}{x}=\int t\frac{1-t^3}{3t^3-2}\frac{3t^2}{(1-t^3)^2}dt=3\int \frac{t^3}{(3t^3-2)(1-t^3)}dt.$$

Таким образом, получили интеграл от рациональной функции.

6.2. Вычисление интегралов с помощью тригонометрических подстановок

1. Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ вычисляют с помощью подстановки $x=a\sin t$.
2. Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ вычисляют с помощью подстановки $x=atgt$.

3. Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ вычисляют с помощью подстановки $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

Во всех случаях подкоренное выражение превращается в полный квадрат, радикал исчезает, а интеграл получает вид: $\int r(\sin t,\cos t)dt$, где r - символ рациональной зависимости.

Пример 3. Вычислить $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Применим подстановку $x=2\sin t$, тогда $dx=2\cos t dt$, $4-x^2=4-4\sin^2 t=4(1-\sin^2 t)=4\cos^2 t$. В новых переменных интеграл $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int \dfrac{2\cos t dt}{2\sin t\cdot 2\cos t}=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{\sin t}=\dfrac{1}{2}\ln|tg\dfrac{t}{2}|+C=\dfrac{1}{2}\ln|tg\dfrac{t}{2}|+C$.

Вернемся к прежним переменным, выполнив тригонометрические преобразования $tg\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{t}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{t}{2}2\cos\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$. $\sin t=\dfrac{x}{2}$, тогда $t=\arcsin\dfrac{x}{2}$, откуда $t\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$, следовательно, $\cos t\geq 0$ и $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

Окончательно имеем $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x/2}{1+\sqrt{4=x^2}/2}\right|+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$.

Пример 4. Вычислить $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}dx}{2+x^2}$.

Применим подстановку $x=tgt$, тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$, $1+x^2=1+tg^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}dx}{2+x^2}=\int \dfrac{1/\cos t}{2+tg^2 t}\dfrac{dt}{\cos^2 t}=\int \dfrac{dt}{\cos t(2\cos^2 t+\sin^2 t)}=\int \dfrac{dt}{\cos t(\cos^2 t+1)}$. Таким образом, получили интеграл от рациональной функции относительно $\cos t$.

Пример 5. Вычислить $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}dx}{x^2}$.

Применим подстановку $x=\dfrac{2}{\cos t}$, тогда $dx=2\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$, $x^2-4=\dfrac{4}{\cos^2 t}-4=4\dfrac{1-\cos^2 i}{\cos^2 t}=4\dfrac{\sin^2 i}{\cos^2 t}$. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}dx}{x^2}=\int 2\dfrac{\sin t}{\cos t}\dfrac{\cos^2 t}{4}2\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int \dfrac{\sin^2 t}{\cos t}dt$.

Таким образом, получили интеграл от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

КАЛИНИЧЕНКО ЕЛЕНА ФЕДОРОВНА

ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

для студентов 1 курса специальностей менеджмент и государственное и муниципальное управление

Научный редактор: Бурмистров В. В.

Подписано в печать 8.02.12.
Печать лазерная. Усл. печ. л. 1
Заказ № 010. Тираж 100 экз.
Отпечатано в КИ (ф) МГОУ