Лекция 2.
Функции

2-1 Понятие функции и способы задания

2-2 Свойства функций

2-3 Элементарные функции

2-4 Последовательности

23 сентября 2007 г.

Эпиграф

Математический анализ не менее всеобъемлющ, чем сама природа.

Ж.Фурье

2-1.
Понятие функции и способы задания

Определение

Четыре способа задания

23 сентября 2007 г.

Постоянные и переменные величины

Постоянной величиной (constant) называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Переменной величиной (variable quantity) называется величина, которая может принимать различные значения.

Одна и та же величина может быть постоянной или переменной в зависимости от рассматриваемой модели и желаний исследователя.

Обозначения. Постоянные (a, b, c, d) и переменные (x, y, z, u, v).

Что такое функция

И.Бернулли в 1718 году дал следующее определение: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Эйлер в «Дифференциальном исчислении» пишет: «Величины, зависящие от других так, что с изменением вторых меняются и первые, принято называть их функциями».

Дирихле: «Переменная величина у называется функцией переменной величины х, если каждому значению величины х соответствует единственное определенное значение величины у.

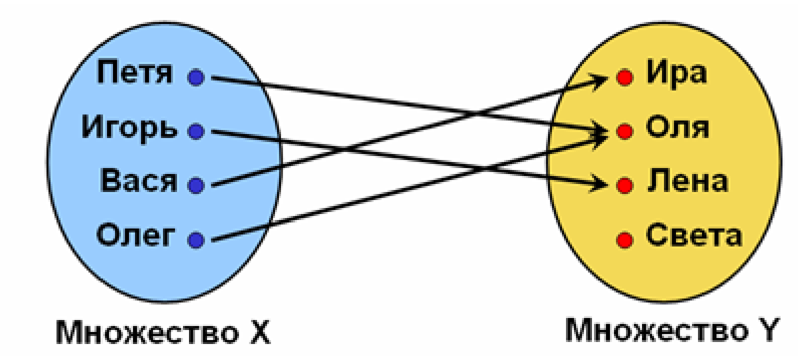
Функция (function)

Правило f, которое ставит в соответствие каждому $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$, называется **функцией**, заданной на множестве X и принимающей значения на множестве Y**.**

Переменная x является **независимой** переменной (или **аргументом**), а y – **зависимой**.

Множество X называется **областью определения** функции, а множество Y – **областью значений**.

$$y = f(x)$$



Задание функций

Задать функцию означает определить три объекта:

1. Множество X
2. Множество Y
3. Правило f

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Аналитический способ

Функция задана **аналитически**, если связь между функцией и аргументом задана формулой:

$$y = f(x)$$

Пример. Функция

$$y = x^2$$

Табличный способ

Функция задана **таблицей**, если для каждого значения аргумента в таблице указано соответствующее ему значение функции.

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

Вопрос: это все возможные значения функции или некоторые?

Графический способ

Функция задана **графически**, если на плоскости изображено множество точек с координатами (x, y), абсциссы которых есть значения аргумента, а ординаты – соответствующие им значения функции.

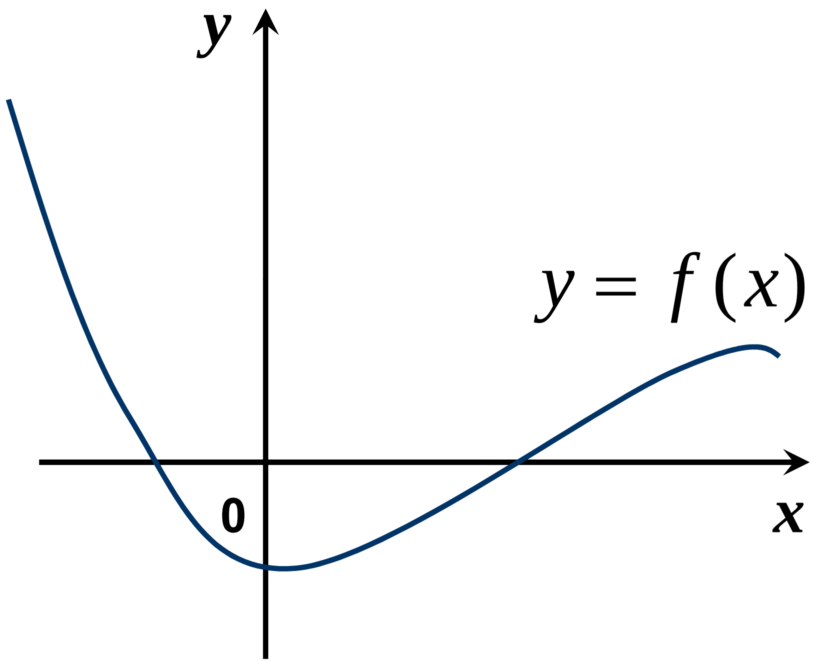


График не дает точного представления о функции, зато позволяет ее «увидеть».

Описательный способ

Функция может быть задана **словесно**.

Пример. Функция равна единице для всех рациональных значений аргумента и равна нулю для иррациональных. Это функция Дирихле. Ее можно записать иначе:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

Пример. Функция Филлипса

Как известно, цена труда зависит от конъюнктуры рынка. Когда на рынке труда имеет место дефицит, то рабочие могут рассчитывать на большую зарплату, и наоборот, в период существования конъюнктурной безработицы рабочим будут платить меньше.

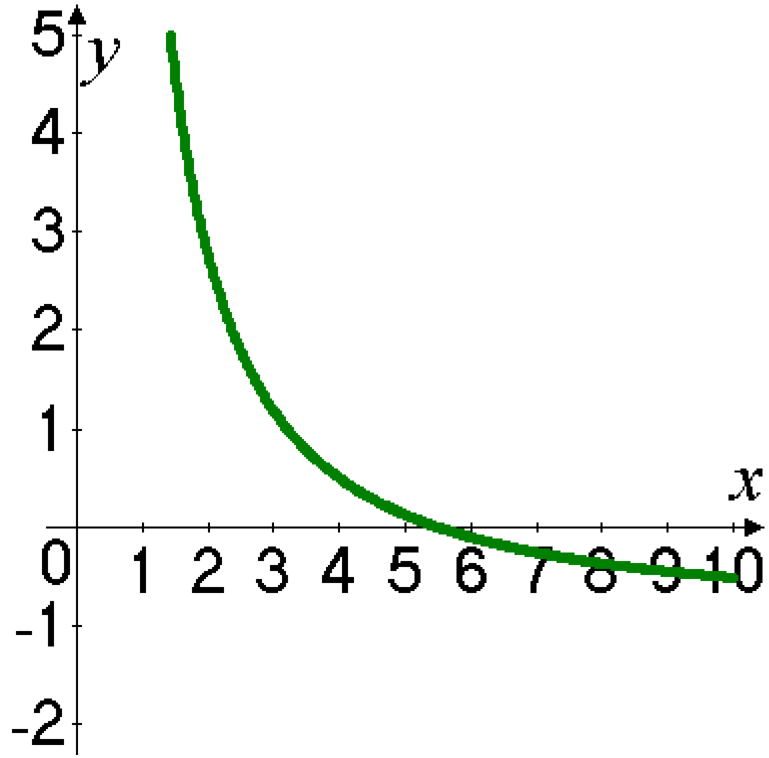
В 1958 году профессор Лондонской школы экономики Филлипс опубликовал результаты своих исследований взаимозависимости между уровнем безработицы и изменением денежной ставки зарплаты в Великобритании в период с 1861 до 1957 года.

Пример. Функция Филлипса

Оказалось, что для первых 52 лет (1861-1913) эта зависимость выражается уравнением:

$$y = -0{,}9 + 9{,}638 \cdot x^{-1{,}394}$$

где X – общий уровень безработицы, Y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах)



Аналитический способ задания функции

Графический способ задания функции

2-2.
Свойства функций

Шесть свойств, которыми могут обладать функции

Понятие обратной функции

Свойства функций

Под основными свойствами функций $y = f(x)$ будем понимать следующие:

1) область определения $D(f)$

2) область значений $E(f)$

3) четность, нечетность

4) монотонность

5) ограниченность

6) периодичность

Область определения

Функция $y = f(x)$ задана, или определена, на множестве X. Множество X называется **областью определения** функции.

Пример. Найти область определения функции:

$$y = \frac{x+5}{x-1}$$

Решение. Функция существует для всех значений аргумента, кроме $x = 1$. Область определения:

$$x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$$

Область значений

Множество всех значений функции (множество Y) называется **областью значений**.

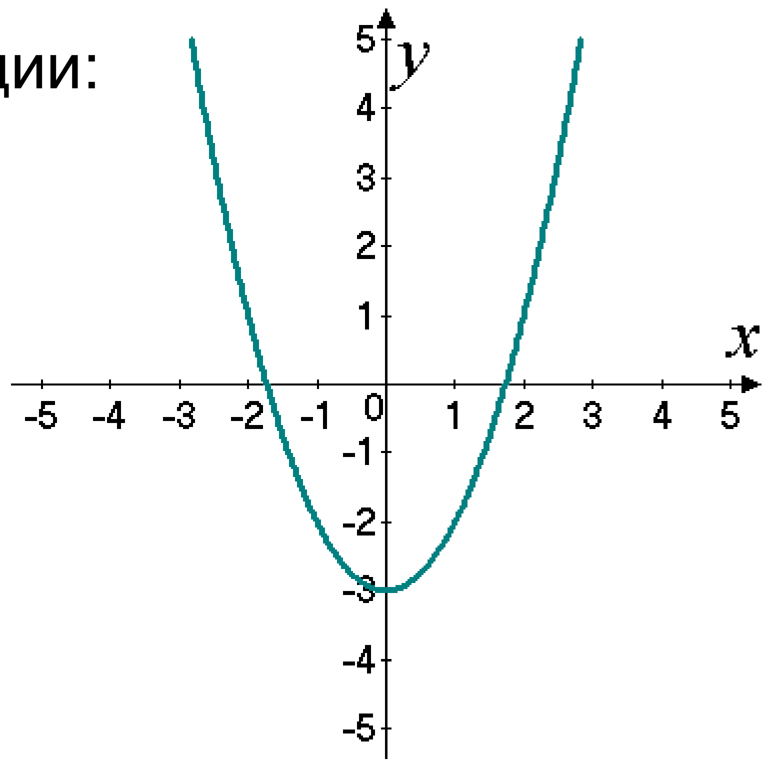
Пример. Найти область значений функции:

$$y = x^2 - 3$$

Решение. График функции – парабола.

Область значений функции:

$$y \in [-3; \infty)$$



Четность, нечетность

Функция $y = f(x)$ называется **четной (even function)**, если для любого x из области определения:

$$f(-x) = f(x)$$

и **нечетной (odd function)**, если :

$$f(-x) = -f(x)$$

График четной функции **симметричен** относительно вертикальной оси, график нечетной функции **центрально симметричен** относительно начала координат.

Примеры

Функция $y = x^2 - 1$ **четная**, так как $y(-x) = x^2 - 1 = y(x)$. График симметричен относительно вертикальной оси.

Функция $y = x^3$ **нечетная**, так как $y(-x) = (-x)^3 = -y(x)$. График центрально симметричен относительно начала координат.

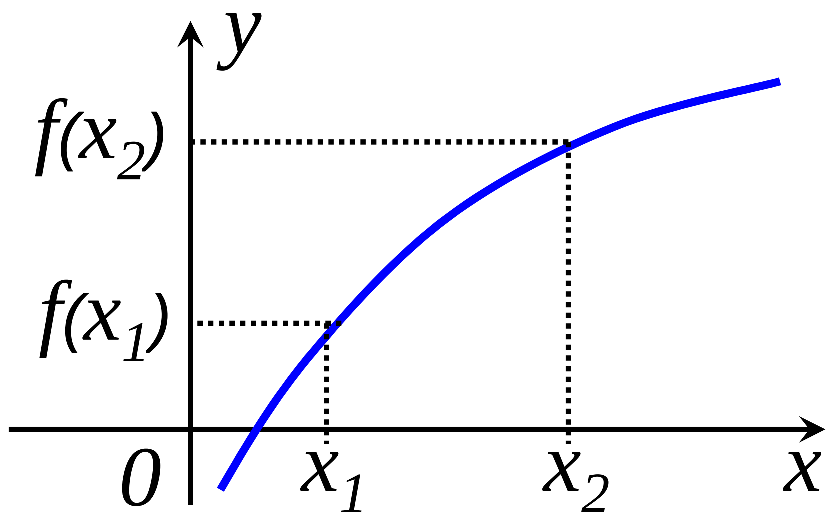
Функция $y = x^2 - x + 2$ не является ни четной, ни нечетной.

Такие функции называют **функциями общего вида**.

Возрастающая функция

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

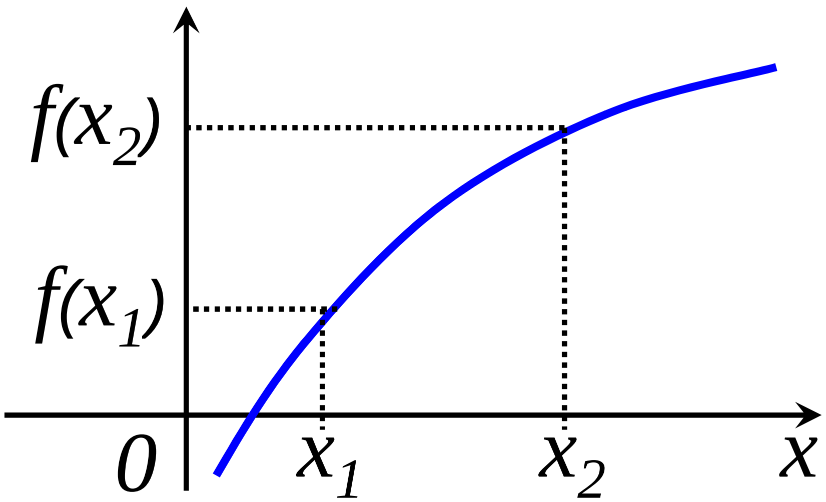
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



Самостоятельно дайте определение убывающей функции, невозрастающей функции.

Монотонность

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными** функциями.



Ограниченность

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in$ X выполняется условие $|f(x)| \leq$ M. В противном случае функция **неограниченная**.

Пример. Функция $y = sin\ x$ является ограниченной на всей числовой оси, поскольку выполняется условие:

$$|sin\ x| \leq 1$$

Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое число Т, что $f(x+T) = f(x)$.

Пример. Функция $y = \sin x$ является периодической, поскольку $y = \sin x = \sin(x+2\pi k)$. Период Т = 2π.

Обратная функция (inverse function)

Если для различных значений x значения функции $y = f(x)$ различны, то для функции f можно рассмотреть обратную ей функцию: $x = f^{-1}(y)$. **Обратная функция** означает установление соответствия:

$$X \xleftarrow{f^{-1}} Y$$

Для обратной функции область определения – множество Y, область значений - множество X.

Вопрос: всегда ли существует обратная функция?

Примеры

1. Для функции $y = sin\ x$ обратной функцией является $x = arcsin\ y$ (не везде!).

2. Для функции $y = a^x$ обратной функцией является $x = log_a y$.

2-3.
Элементарные функции

Пять видов основных элементарных функций

Сложные функции

Общее понятие элементарной функции

Преобразование графиков

Основные элементарные функции

1. Степенная функция: $y = x^{\alpha}$
2. Показательная функция: $y = a^{x}$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$
3. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x,\ y = \cos x,$

   $y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$
5. Обратные тригонометрические функции:

   $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,$

   $y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x$

Сложная функция

Пусть функция $y = f\,(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u = g\,(x)$ от переменной x, определенной на множестве X, с областью значений U. Тогда функция $y = f(g(x))$, заданная на множестве X, называется **сложной функцией**.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f(g(x))"'] & U \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Синонимы: композиция функций, суперпозиция функций, функция от функции.

Понятие элементарной функции

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными**.

Пример. Функция:

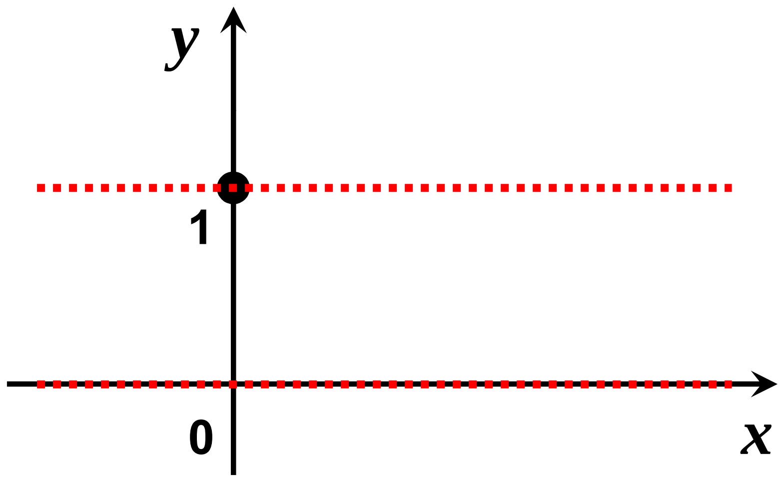
$$y = \sqrt{\sin x} - \frac{2^x - 3}{\ln(x^2 \cos x + 4)}$$

является элементарной.

Функция Дирихле

Пример неэлементарной функции - функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$



Это не график, поскольку построить график функции Дирихле **невозможно**. Это лишь ее схематическое изображение!

Дирихле Петер Густав Лежён (1805 – 1859)

Дирихле (Dirichlet) Петер Густав Лежён немецкий математик, член Берлинской Академии наук. С 17 лет был домашним учителем в Париже, в 22 года – доцент в Бреславле, в 26 лет – профессор Берлинского университета. С 1855 года профессор Геттингенского университета.

В математике задача, интеграл, принцип, функция, ряды связаны с именем Дирихле.

Преобразование графиков

Если имеется функция $y = f(x)$,

то из ее графика путем преобразований можно получить график функции $y = A f(ax + b) + B$,

где A, B, a, b – некоторые действительные числа.

Подробнее об этом в приложении к лекции.

Пример сложной функции

Будон Р. Место беспорядка. Критика теории социального изменения. 1998.

Социальный или экономический феномен M является функцией суммы действий *m*, зависящих от ситуации S, в которой находятся акторы. Ситуация, в свою очередь, определяется макросоциальными характеристиками M‘.

$$M = M(m(S(M')))$$

или

$$M = MmSM'$$