Лекция 5.
Непрерывность функции

5-1 Понятие непрерывности функции

5-2 Свойства функций, непрерывных на отрезке

5-3 Точки разрыва

23 сентября 2007 г.

Эпиграф

Я знаю, что это такое, только до той поры, пока меня не спросят – что это такое!

Блаженный Августин

5-1. Понятие непрерывности функции

Определение на языке пределов

Определение на языке приращений

Непрерывность на промежутке

Интуитивное определение непрерывности

Если линию можно построить, не отрывая карандаша от бумаги, эта линия **непрерывна**.

Наше интуитивное представление о непрерывности следует подкрепить точными математическими определениями.

Существует два определения непрерывности функции: на языке пределов и на языке приращений. Мы рассмотрим их, а затем убедимся в их эквивалентности.

Определение непрерывности

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a**, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке a,

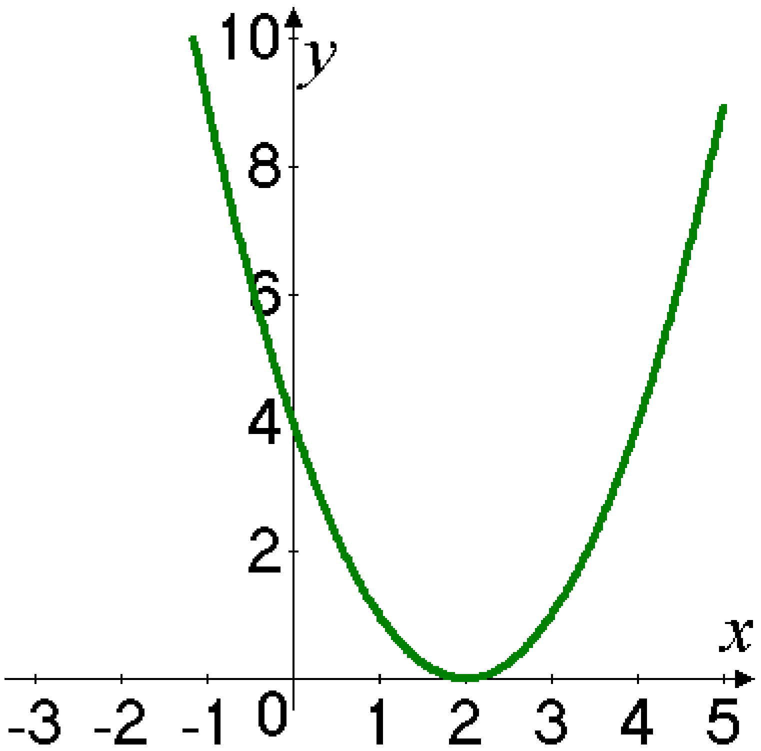
2) имеет конечный предел при $x \to a$,

3) этот предел равен значению функции в этой точке:

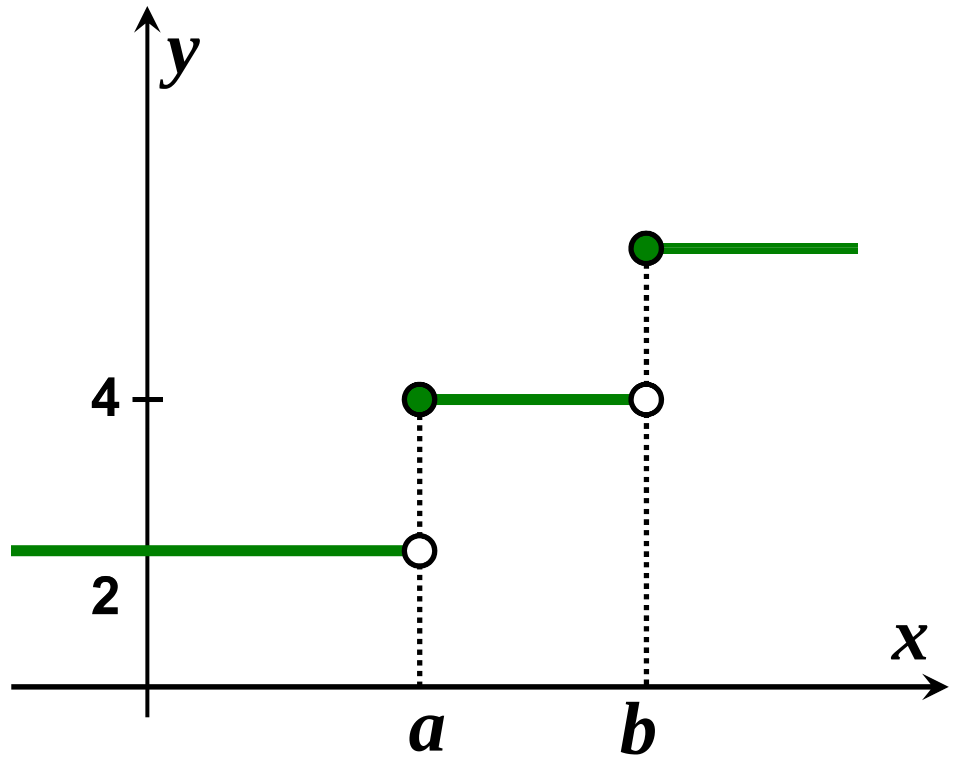
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Примеры

Непрерывная функция



Не непрерывная функция (разрывная)



Второе определение непрерывности

Функция $f\ (x)$ называется **непрерывной в точке *a***, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

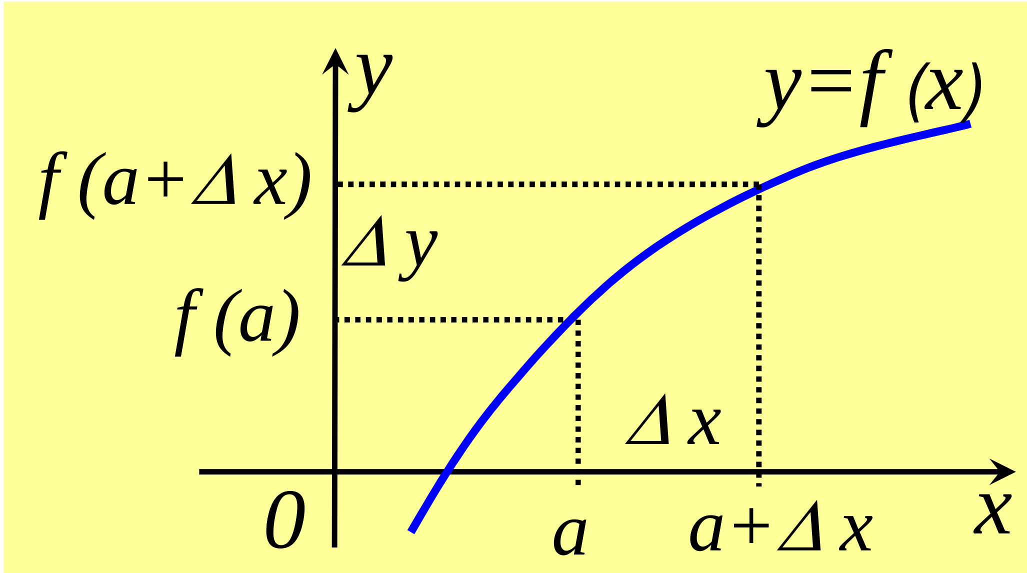
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Приращение функции:

$\Delta y = f\,(a+\Delta x) - f\,(a)$

Определение означает, что при $\Delta x \to 0$

$\Delta y \to 0$



Доказательство эквивалентности

Докажем равносильность двух определений непрерывности.

1 $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x-a\to 0} (f(x) - f(a)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(a+\Delta x-a)\to 0} (f(a+\Delta x) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$ 2

Непрерывность на промежутке

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Утверждение. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Непрерывность функции x^2

Используем для доказательства непрерывности определение 2.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 0$$

Получили, что функция x^2 непрерывна.

Задание. Докажите непрерывность функции sin x.

5-2. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение

Первая теорема Вейерштрасса

Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема Больцано-Коши

23 сентября 2007 г.

Ограниченная функция (bounded function)

Функция называется **ограниченной** на отрезке $[a, b]$, если существует число M такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство: $|f(x)| \le M$.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897) – немецкий математик. Начал свою деятельность в качестве учителя средней школы. С 1856 года профессор Берлинского университета.

Вейерштрасс дал строгое доказательство основных свойств функций, непрерывных на отрезке, построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке и получил ряд других результатов.

Две теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $f\ (x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

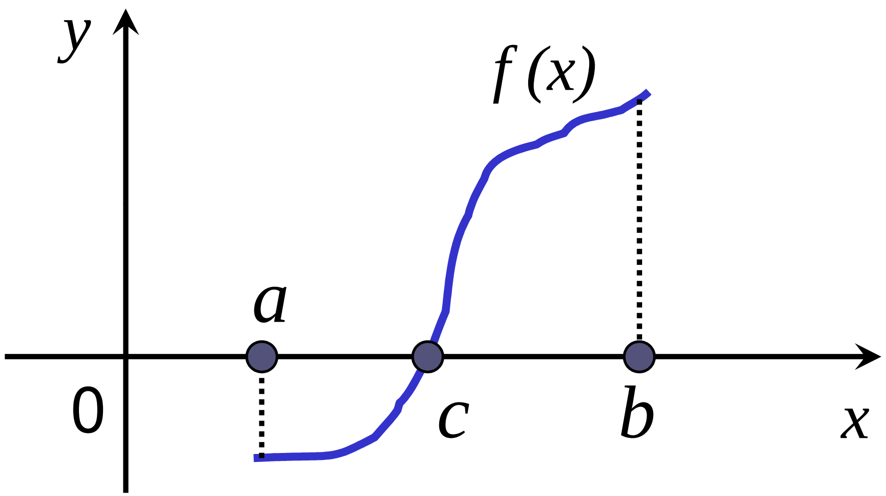
Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $f\ (x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M.

Больцано Бернард

Больцано Бернард (1781–1848) – чешский математик, философ, теолог. Занимал кафедру истории религии в Пражском университете. В 1820 году был уволен за вольнодумство и лишен права публичных выступлений, после чего работал, в основном, в области логики и математики.

Теорема Больцано-Коши

Если функция $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и значения на концах этого отрезка $f\,(a)$ и $f\,(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f\,(c) = 0$.



$f\,(a) < 0$
$f\,(b) > 0$
$f\,(c) = 0$

5-3.
Точки разрыва

Правосторонние и левосторонние пределы

Разрыв I рода

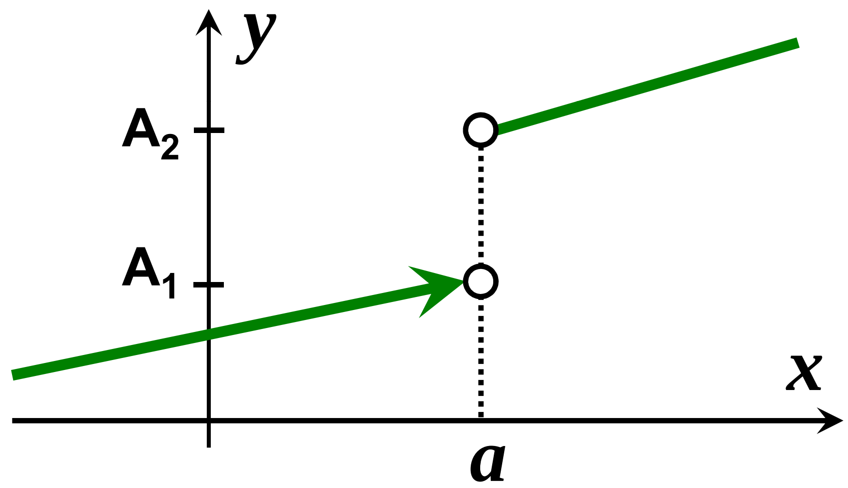
Разрыв II рода

23 сентября 2007 г.

Левосторонний предел

Если функция $f\,(x)$ стремится к числу A_1 по мере стремления x к a со стороны *меньших* значений, то A_1 называют **левосторонним пределом** функции в точке $x = a$ и пишут:

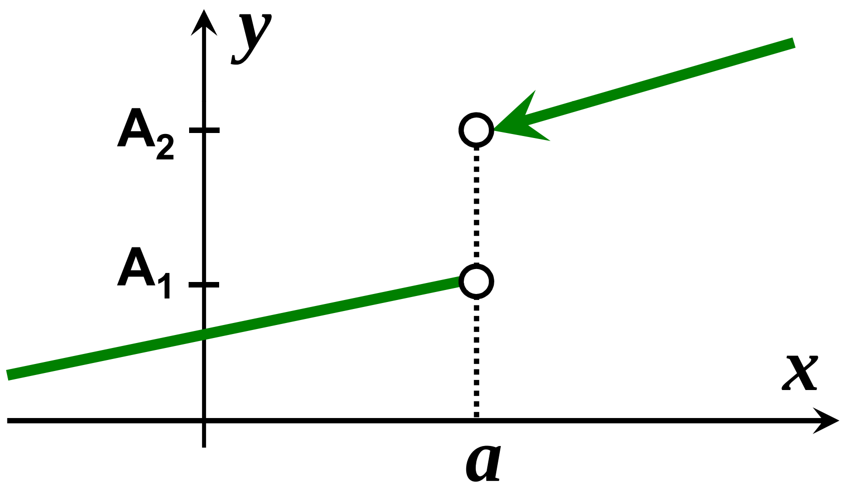
$$\lim_{x \to a-0} f\,(x) = A_1$$



Правосторонний предел

Если функция $f\,(x)$ стремится к числу A_2 по мере стремления x к a со стороны *больших* значений, то A_2 называют **правосторонним пределом** функции в точке $x = a$ и пишут:

$$\lim_{x \to a+0} f\,(x) = A_2$$



Точка разрыва (break point)

Рассмотрим функцию $f\ (x)$, определенную на промежутке X, кроме, может быть, точки $a \in X$.

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f\ (x)$, если в ней функция определена, но не является непрерывной, или не определена в этой точке.

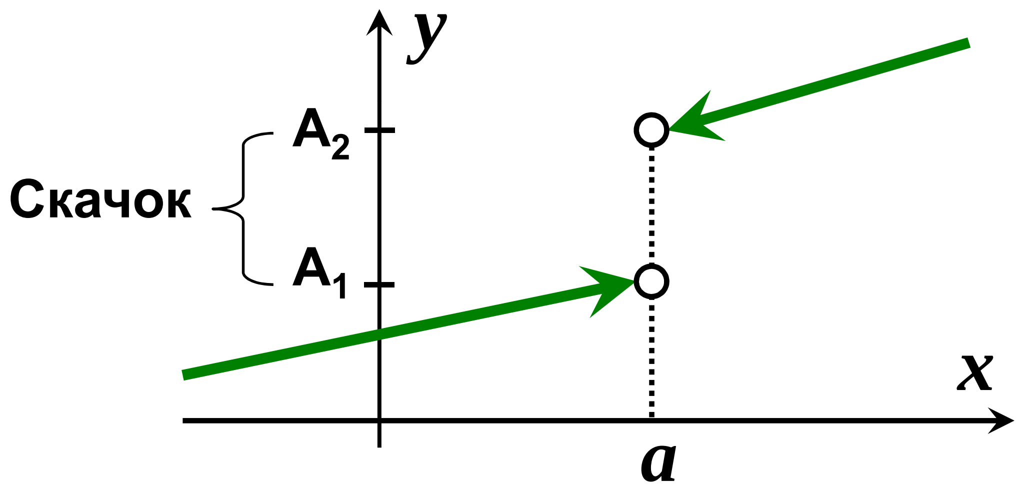
Разрыв I рода

Разрыв I рода, если в точке a существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1 \qquad A_2 \neq A_1$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2$$

Разность $A_2 - A_1$ называют **скачком**.



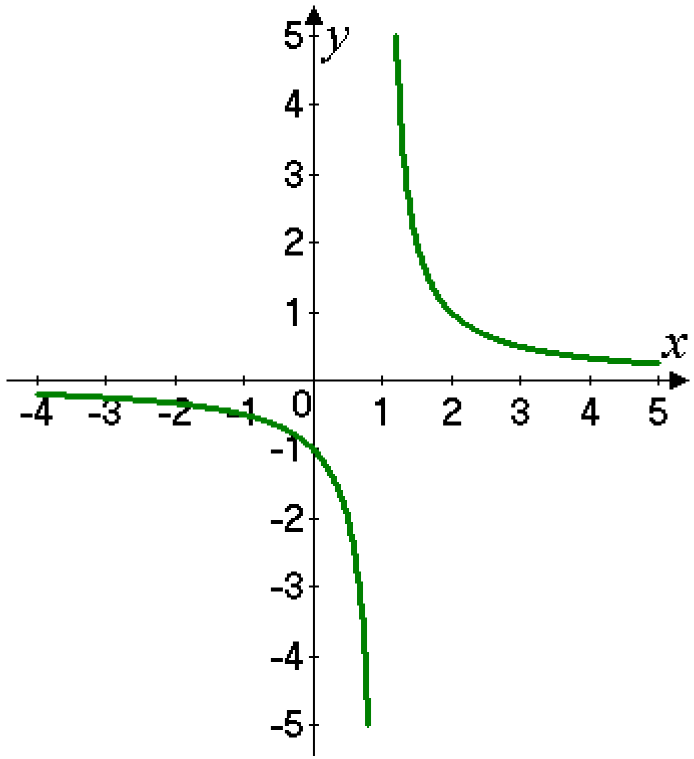
Разрыв II рода

Разрыв II рода, если в точке a хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

не существует или бесконечен.



Задача

Определить характер разрывов функции:

$$y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x < 2 \\ 1, \text{ если } x = 2 \\ 4, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение

Эта функция непрерывна всюду, кроме точки x = 2.

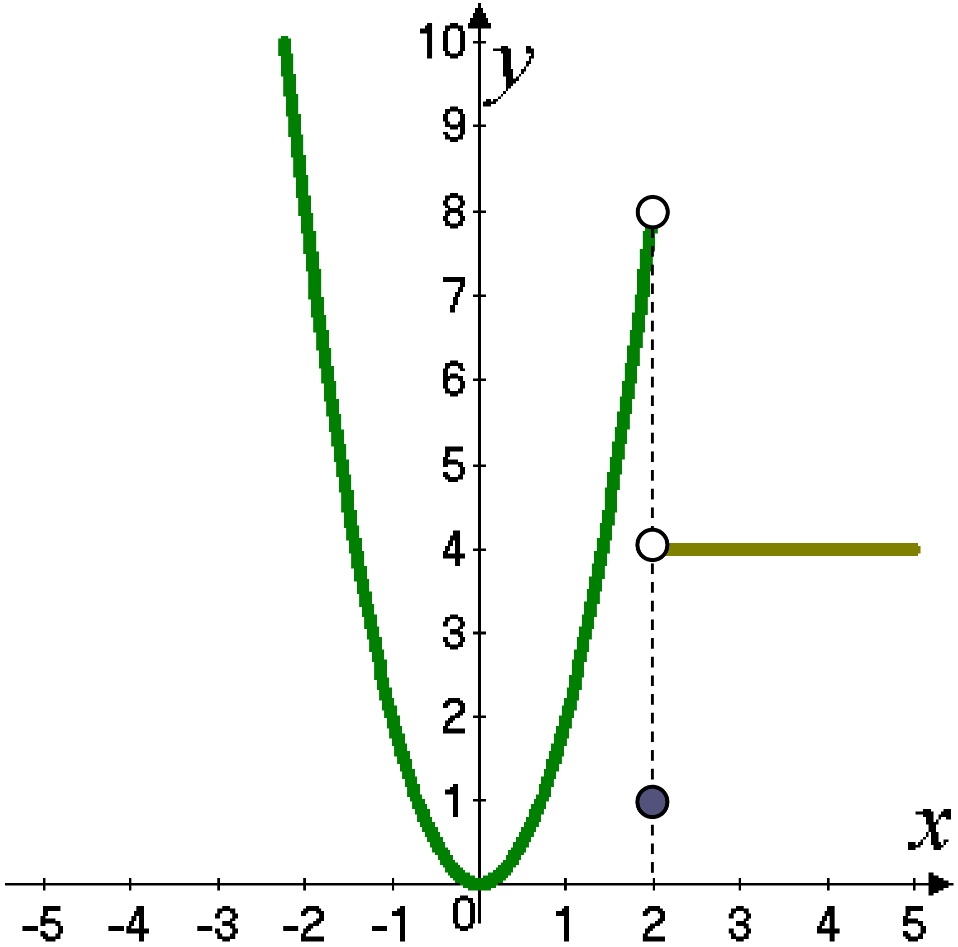
Вычислим предел слева и предел справа:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 2x^2 = 8$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 4 = 4$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$$

Это разрыв скачком.



Приложение

Отрывок из «Войны и мир»

23 сентября 2007 г.

Непрерывность движения

Том третий
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Л. Н. Толстой «Война и мир»

I

Для человеческого ума непонятна абсолютная непрерывность движения. Человеку становятся понятны законы какого бы то ни было движения только тогда, когда он рассматривает произвольно взятые единицы этого движения. Но вместе с тем из этого-то произвольного деления непрерывного движения на прерывные единицы проистекает большая часть человеческих заблуждений.

Известен так называемый софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит черепаху) вытекала из того только, что произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно.

Непрерывность движения

Л. Н. Толстой
«Война и мир»

Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно-малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми.

Эта новая, неизвестная древним, отрасль математики, при рассмотрении вопросов движения, допуская бесконечно-малые величины, то есть такие, при которых восстановляется главное условие движения (абсолютная непрерывность), тем самым исправляет ту неизбежную ошибку, которую ум человеческий не может не делать, рассматривая вместо непрерывного движения отдельные единицы движения.

В отыскании законов исторического движения происходит совершенно то же.

Продолжение следует …