Лекция 7. Первообразная и неопределенный интеграл

7-1 Первообразная функции

7-2 Неопределенный интеграл и его свойства

7-3 Методы интегрирования

28 октября 2007 г.

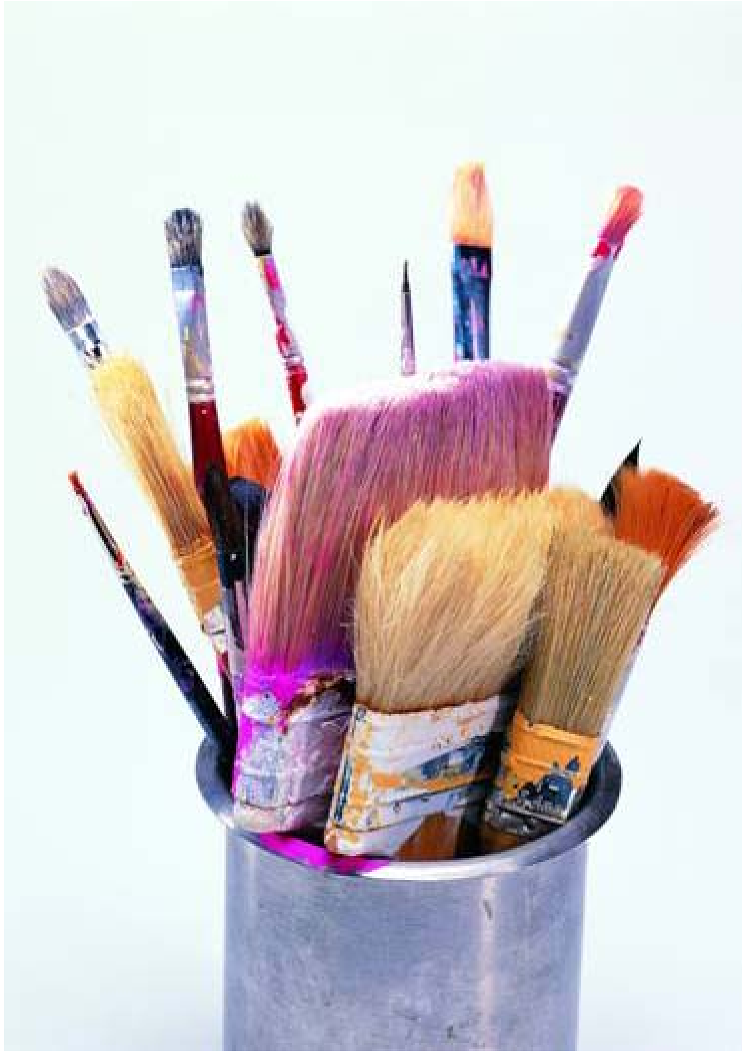
Эпиграф

Смысл там, где змеи интеграла.
Меж цифр и букв, меж d и f !

В.Брюсов

Дифференцирование – это технология, тогда как интегрирование всегда было искусством.

Ничья цитата



7-1. Первообразная

Определение

Теорема о первообразных

28 октября 2007 г.

Первообразная (antiderivative)

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, если ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Пример. Поскольку

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

тогда x^3 есть первообразная для функции $3x^2$

Теорема о первообразных

Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f\ (x)$ в некотором промежутке X, то найдется такое число *C*, что справедливо равенство:

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

(две первообразные одной функции отличаются на постоянную).

Доказательство

Поскольку

$$(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число *C*, что

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

или

$$F_2(x) = F_1(x) + C \qquad \square$$

7-2.
Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла

Свойства

28 октября 2007 г.

Неопределенный интеграл (indefinite integral)

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в общее выражение входит слагаемое, которое можно выбрать произвольным.

Пояснение обозначений

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{\text{Подынтегральное выражение}} = \underbrace{F(x)+C}_{\text{Множество первообразных}}$$

Знак интеграла

Произносится **Интеграл эф от икс дэ икс**.

Знак интеграла есть вытянутый символ S от латинского **Summa**. Введен Лейбницем. Термин «**интеграл**» введен Якобом Бернулли от латинского слова **integralis** (целостный) или, по другому предположению, от **integro** (восстанавливать).

Бернулли Якоб

Бернулли (Bernoulli) Якоб (1654-1705) самый знаменитый из трех выдающихся поколений математиков Бернулли, применившими и развившими дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница.

Автор первого трактата по математической теории вероятностей.

Примеры

1. $$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

2. $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

3. $$\int e^x dx = e^x + C$$

Пять свойств неопределенного интеграла

Свойство 1.

Производная от неопределенного интеграла

Свойство 2.

Дифференциал неопределенного интеграла

Свойство 3.

Неопределенный интеграл от дифференциала

Свойство 4.

Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

Свойство 5.

Интеграл от алгебраической суммы двух функций

Свойство 1.

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$$

$\square$

Свойство 2.

Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\big(F(x)+C\big) = (F(x)+C)'dx =$$

$$= F'(x)dx = f(x)dx$$

□

Свойство 3.

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого *C*:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

$\square$

Свойство 4.

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Доказательство.

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$

$\square$

Свойство 5.

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказательство. Аналогично свойству 4.

7-3.
Методы интегрирования

Таблица интегралов

Замена переменной

Интегрирование «по частям»

Примеры

28 октября 2007 г.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на применении свойств интеграла.

Примеры.

$$\int (5x^4 - 6x^2 + 2)dx = \int 5x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 2dx =$$

$$= x^5 - 2x^3 + 2x + C$$

$$\int (1 - \sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C$$

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Примеры

Пример 1. Найти интеграл:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Пример 2. Найти интеграл:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Примеры

Пример 3. Найти интеграл:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-3e^{x}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int\frac{1}{x}dx-3\int e^{x}dx=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\ln|x|-3e^{x}+C=-2\sqrt{x}+2\ln|x|-3e^{x}+C$$

Примеры

Пример 4. Найти интеграл:

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int dx =$$

$$= \ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C$$

Метод замены переменной

Метод основан на понятии производной сложной функции $F(\varphi(x))$.

Теорема. Если функция $f(t)$ имеет первообразную $F(t)$, а функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема, то функция $f(\varphi(x))$ также имеет первообразную:

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

Доказательство

По правилу дифференцирования сложной функции

$$F'(t) = F'(\varphi(x)) = F_t'(t)\varphi_x'(x) = f(t)\cdot\varphi'(x) =$$
$$= f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) =$$
$$= F(\varphi(x)) + C$$

$\square$

Пример

Найти интеграл:

$$\int 2x \sin x^2 dx$$

Введение переменной под **знак дифференциала**

Преобразовываем функцию под знаком дифференциала:

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin x^2 d(x^2) = -\cos x^2 + C$$

Другими словами, мы **ввели переменную под знак дифференциала**.

Пример

Получили:

$$\int 2x \sin x^2 dx = -\cos x^2 + C$$

Иначе можно записать решение через замену переменной:

$$t = x^2 \qquad dt = d(x^2) = 2xdx$$

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

Теорема

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

где k и b постоянные числа, $k \neq 0$.

Пример

Найти интеграл:

$$\int (3x^2+5)^3 x\,dx$$

Решение.

Делаем замену: $t = 3x^2+5$

Находим: $dt = d(3x^2+5) = 6x\,dx$

$$\int (3x^2+5)^3 x\,dx = \frac{1}{6}\int t^3 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{(3x^2+5)^4}{24} + C$$

Формула интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции.

Тогда для интегрирования может использоваться **формула интегрирования по частям** (integration by parts):

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Доказательство

Дифференциал произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Если u(x) и v(x) – дифференцируемы, то проинтегрируем равенство и получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

□

Пример 1

Найти интеграл $\int xe^x dx$

подсказка

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Пример 2

Найти интеграл $\int x \ln x dx$

подсказка

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Решение.

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

«Неберущиеся» интегралы

Не все интегралы могут быть найдены рассмотренными способами.

«Неберущиеся» - интегралы, которые не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций. Например,

$$\int e^{-x^2} dx \qquad \int \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

Эти функции можно представить в виде ряда и найти приближенно.

Компьютерное интегрирование

Теперь имеются компьютерные пакеты, позволяющие находить любые интегралы. Например, пакет **Maple**.

Интегрирование при помощи компьютера превращает былое искусство в элементарное нажатие кнопок.

Ахтямов А.М.