Практическая работа № 3

Выполнение действий над комплексными числами

в алгебраической форме.

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Комплексным числом называется число вида z = x +i y, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, то есть число квадрат которого равен –1, x – действительная часть, y – мнимая часть, если x = 0, то число z = i y чисто мнимое. Запись $z = x + iy$ – алгебраическая форма записи числа.

2 Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называются равными ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

3 Два комплексных числа вида $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными.

4 Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой M (x,y) плоскости Oxy и, наоборот, каждую точку M(x,y) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить в виде радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM}$

5 Длина вектора $r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа.

6 Угол φ, образованный вектором OM с положительным направлением оси Ox называется аргументом комплексного числа: φ =*Arg z*. Аргумент комплексного числа величина многозначная $Arg\,z = arg\,z + 2\pi k$, где *arg z* – главное

значение аргумента. $-\pi < arg\ z \leq \pi$ (или $[0, 2\pi)$). Угол φ таков, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

7 Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида $z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

8 Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;

9 Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

10 Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Задание

Исходные данные:

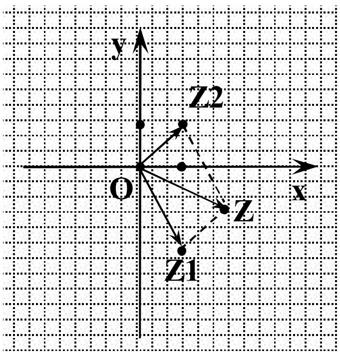
1 Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 2i$ и $z_2 = 1 + i$. Вычислить $z = z_1 + z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а также

$$z_1 - z_2; \quad z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}$$

Решение:

а) Вычислим сумму аналитически и графически:

$$z = z_1 + z_2 = 1 - 2i + 1 + i = 2 - i$$



б) Найдем модуль z: $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

в) Вычислим аргумент:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$
$$\varphi = -arctg\frac{1}{2}$$

г) Найдем $z_1 - z_2 = 1 - 2i - (1 + i) = 1 - 2i - 1 - i = -3i$

д) Вычислим $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(1 + i) = 1 - 2i + i - 2i^2 = 1 - i + 2 = 3 - i$

е) Найдем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1-3i-2}{2} = \frac{-1-3i}{2} = -0{,}5 - 1{,}5i$$

Ответ:
$$\begin{aligned} &z = 2 - i \\ &r = \sqrt{5} \\ &\varphi = -arctg0.5 \\ &z_1 - z_2 = -3i \\ &z_1 \cdot z_2 = 3 - i \\ &\frac{z_1}{z_2} = -0.5 - 1.5i \end{aligned}$$

Задания к практической работе.

1 $z_1 = 5 - i$, $z_2 = 1 + 3i$	2 $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 1 - 2i$	3 $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 2 - i$
4 $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 1 + i$	5 $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 5 - 2i$	6 $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 - 2i$
7 $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 1 + 4i$	8 $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 1 + 3i$	9 $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 2 - 3i$
10 $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 7 - i$	11 $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 5i$	12 $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 6 - 5i$
13 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 7 + 3i$	15 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 5 - 4i$	16 $z_1 = 1 - 4i$, $z_2 = 1 + 2i$
17 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 + i$	18 $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -2 + i$	19 $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = 4 + 3i$
20 $z_1 = -i$, $z_2 = 7 + 4i$	21 $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 5 + 3i$	22 $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 1 + 2i$
23 $z_1 = 6 - 5i$, $z_2 = 1 + i$	24 $z_1 = 7 - 3i$, $z_2 = -1 + 4i$	25 $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = -2 + 3i$
26 $z_1 = -1 + 5i$, $z_2 = 2 - 5i$	27 $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 5 - 4i$	28 $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 4 + 5i$
29 $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 1 - 3i$	30 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$	31 $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -6 - i$
32 $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = -1 + 7i$	33 $z_1 = -1 + 7i$, $z_2 = 4 - 5i$	34 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 3

Тема занятия: *выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме*

Цель выполнения задания: *научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме*

Необходимо знать: *основные формулы и правила действий над комплексными числами*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила действий над комплексными числами*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое комплексное число? 2 Что такое мнимая единица? 3 Что такое действительная часть числа? 4 Что такое мнимая часть числа? 5 Как сравнить два комплексных числа? 6 какие числа называются сопряженными? 7 как представить комплексное число графически? 8 Что такое модуль числа? 9 Что такое аргумент числа? 10 Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа? 11 Как найти аргумент числа? 12 Как найти сумму комплексных чисел? 13 Как найти разность комплексных чисел? 14 Как найти произведение комплексных чисел? 15 Как найти частное комплексных чисел?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Боголюбов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://mvm-math.narod.ru

5 http://www.pm298.ru