Лекция 8.
Определенный интеграл

8-1 Основная формула интегрального исчисления

8-2 Методы вычисления определенного интеграла

8-3 Вычисление площадей плоских фигур

8-4 Несобственные интегралы

28 октября 2007 г.

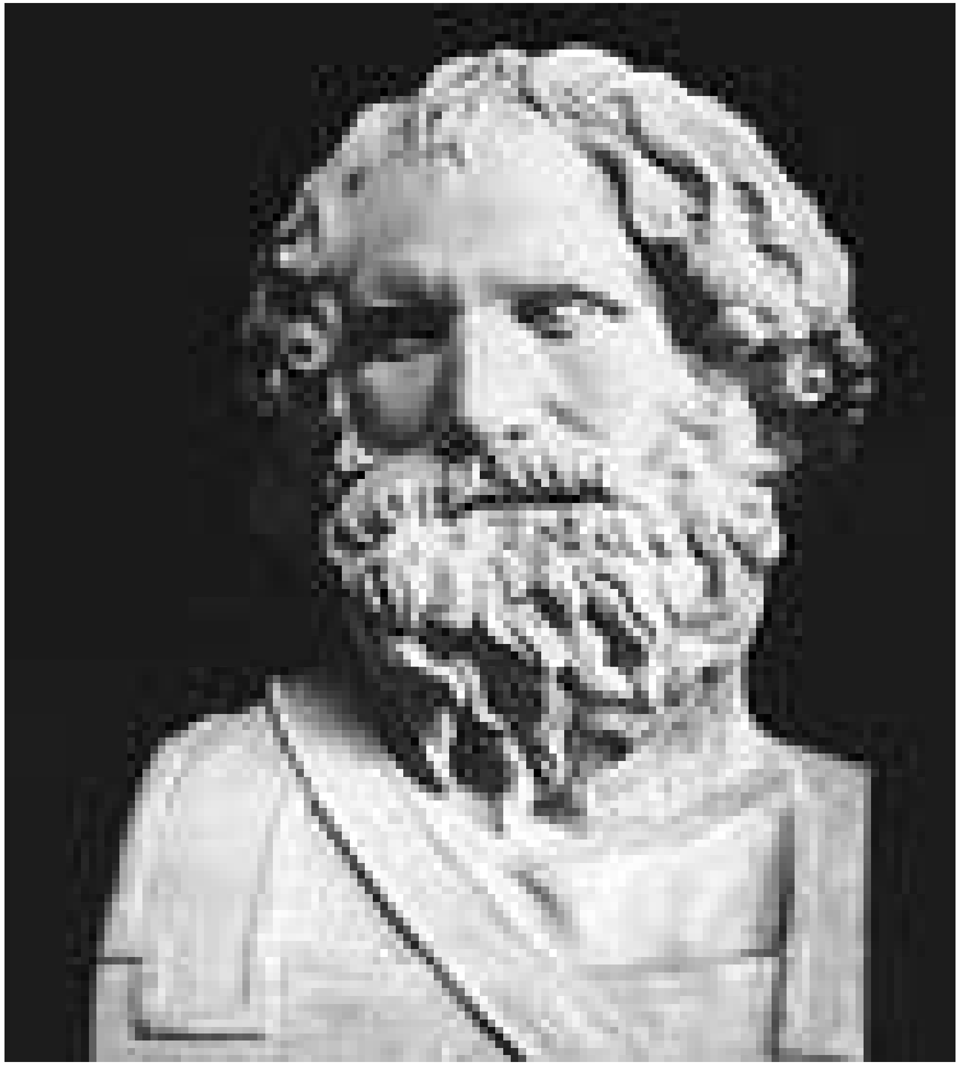
Эпиграф

Нет ни одной области математики, … которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н.Лобачевский

Архимед

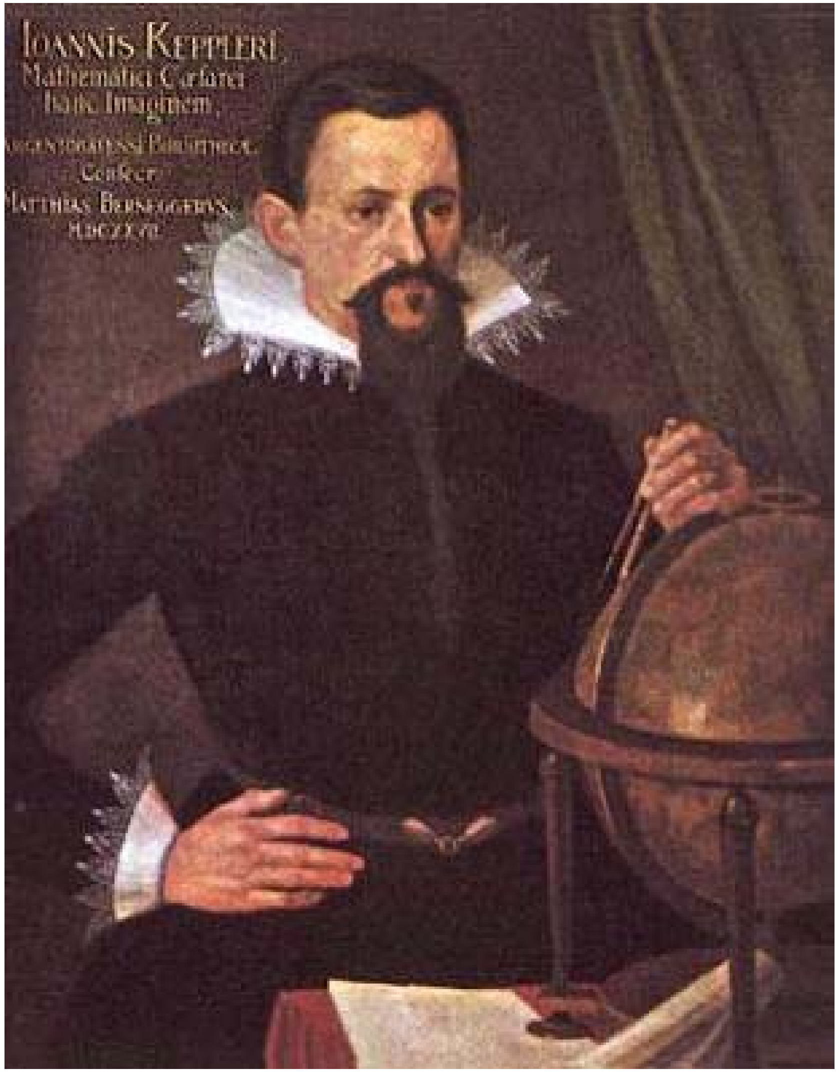
Архимед (около 287 – 212 до н.э.) – древнегреческий математик, физик, астроном и изобретатель. Родился в Сиракузах (о.Сицилия) и жил в эпоху 1-й и 2-й Пунических войн. Автор многих технических изобретений. Его математические работы получили должную оценку только при создании интегрального и дифференциального исчислений. Архимед вычислил площади и объемы криволинейных фигур, ввел понятие центра тяжести, удельного веса.



Кеплер Иоганн

Кеплер Иоганн (1571-1630) – немецкий астроном и математик. Установил три закона движения планет. Изложил теорию солнечных и лунных затмений, их причины и способы предсказания.

Оригинальными приемами интеграции нашел объемы 92 тел вращения.



И.Ньютон

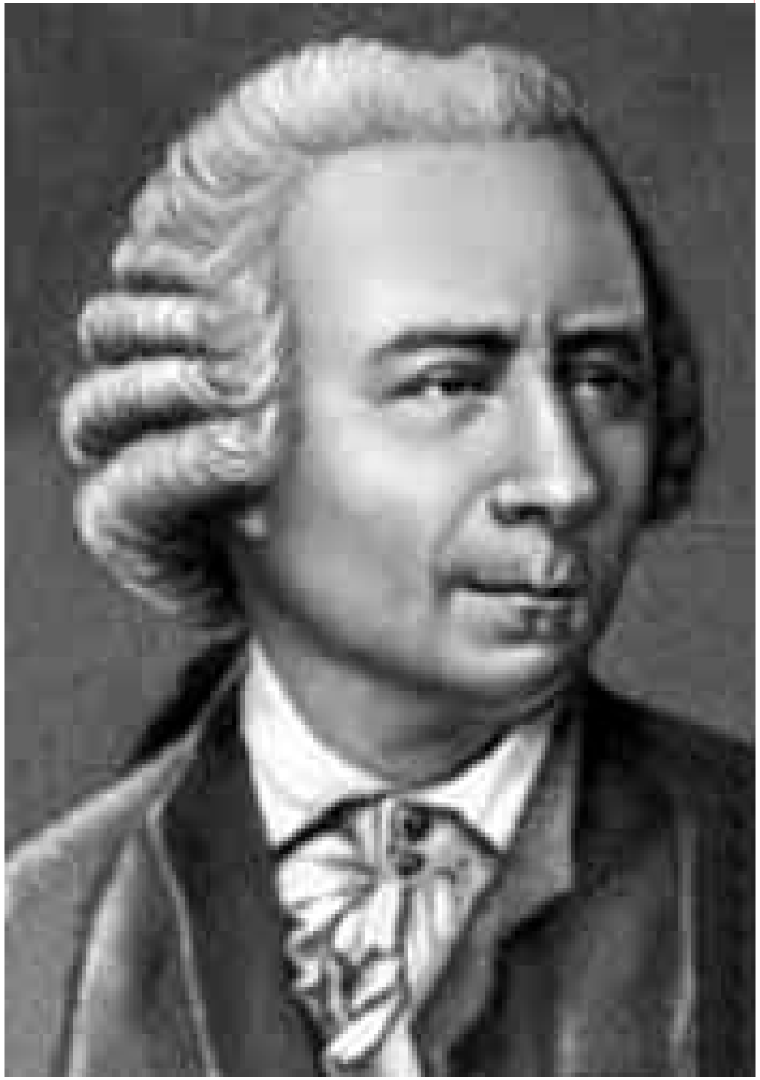
И.Ньютон открыл взаимно обратный характер интегрирования и дифференцирования.

Г.Лейбниц

Главными понятиями анализа Г.Лейбница были дифференциал как бесконечно малая разность и интеграл как сумма.

Л.Эйлер

В работах Л.Эйлера были найдены практически все известные в настоящее время приемы интегрирования в элементарных функциях.



8-1.
Основная формула интегрального исчисления

Формула Ньютона-Лейбница

Свойства определенного интеграла

Примеры

28 октября 2007 г.

Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл на отрезке $[a, b]$ от функции $f(x)$, непрерывной на этом отрезке, есть приращение ее первообразной $F(x)$ на $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла

Обсуждение обозначений

Пишут также:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Читается «интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

Числа a и b называются **верхним и нижним пределом интегрирования**.

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а $f(x)dx$ - **подынтегральным выражением**.

Различие между интегралами

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx$$

Функция

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Число

Пример

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Подсказка

Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^3 2xdx$$

Решение.

$$\int_1^3 2xdx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Нашли первообразную

Считаем интеграл по формуле Н-Л

Получили ответ

Свойства определенного интеграла

Свойство 1. При вычислении можно использовать любую первообразную $F(x)+C$, в том числе $C=0$.

Свойство 2. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Свойство 3. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Нужно уметь проверять свойства непосредственно при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла

Свойство 4. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

где $c \in [a, b]$. Это означает, что отрезок интегрирования можно разбить на части.

Свойство 5. Теорема о среднем (следующий слайд).

Нужно уметь проверять свойства непосредственно при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

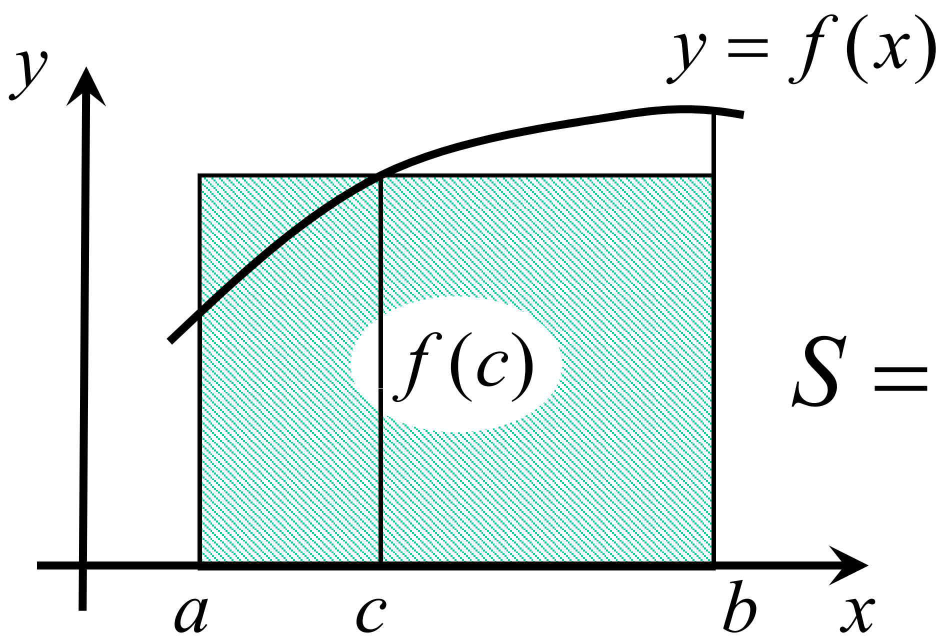
Свойство 5. Теорема о среднем

Теорема. Если функция $f\ (x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то найдется такая точка $c \in [a, b]$, что:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Геометрическая интерпретация

Найдется такая точка c, что площадь под кривой равна площади прямоугольника.



$$S = f(c)(b-a)$$

Свойство 5. Теорема о среднем

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такая точка $c \in [a, b]$, что:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Доказательство. Применяем теорему Лагранжа к функции $F(x)$, которая является первообразной для $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$$

□

8-2.
Методы интегрирования

Применение формулы Ньютона-Лейбница

Замена переменной в определенном интеграле

Интегрирование «по частям»

28 октября 2007 г.

Замена переменной

Замена переменной в определенном интеграле требует и замены пределов интегрирования:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))d\varphi(t)$$

Условия использования:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

2. Отрезок $[a, b]$ есть множество значений функции $x = \varphi(t)$, имеющей непрерывную производную.

Пример

Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 (1+x^2)^3 x dx$$

Решение.

$$\int_0^1 (1+x^2)^3 x dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| \left. \begin{array}{ccc} x & 0 & 1 \\ t & 1 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 t^3 dt = \left. \frac{t^4}{2 \cdot 4} \right|_1^2 = \frac{2^4}{8} - \frac{1^4}{8} = \frac{15}{8}$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Условие использования:

Функции $u\ (x)$ и $v\ (x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.

Пример

Вычислить интеграл:

$$\int_1^2 xe^x dx$$

Решение.

$$\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ e^x dx = dv & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

8-3.
Вычисление площадей плоских фигур

Задача о площади криволинейной трапеции

Составление интегральной суммы

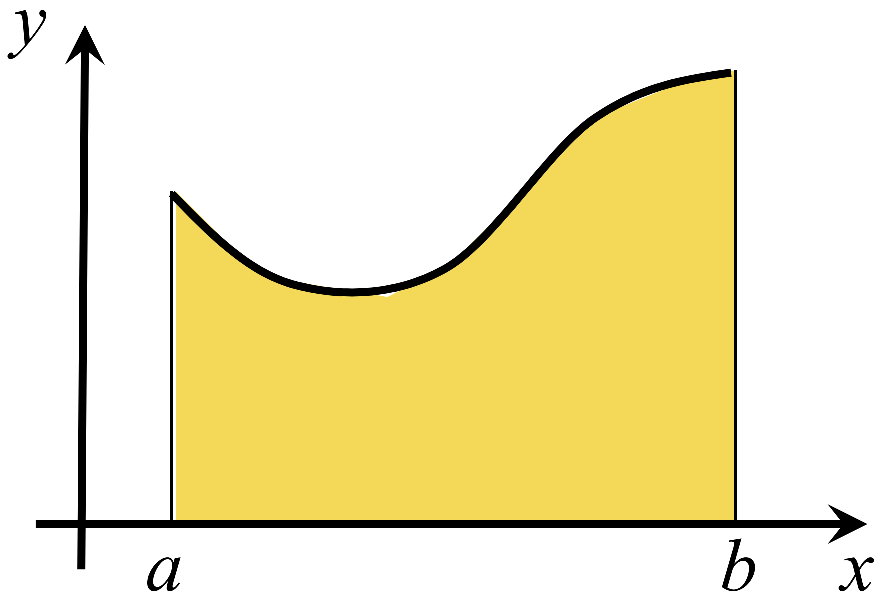
Классическое определение определенного интеграла

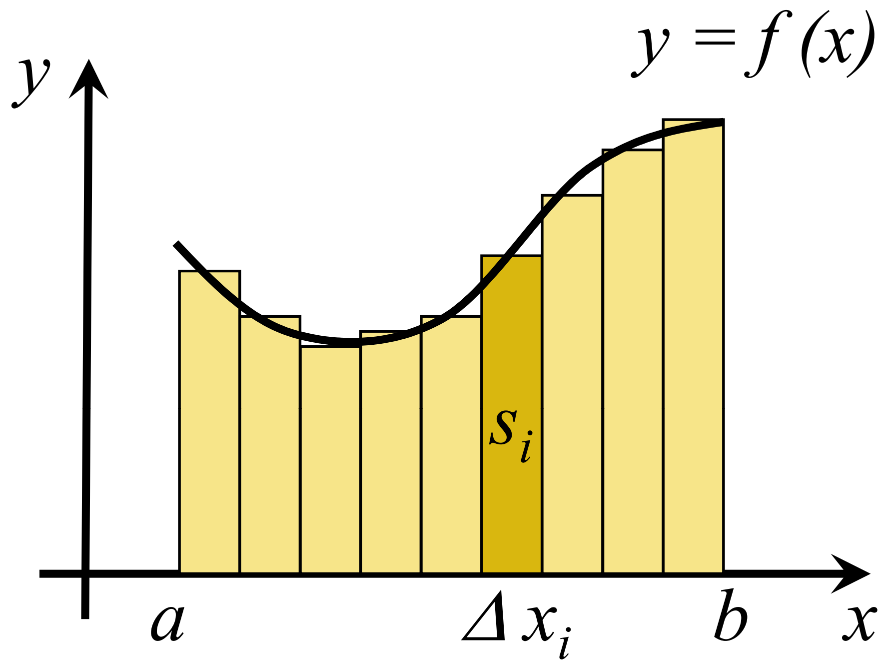
Геометрические приложения

28 октября 2007 г.

Задача о площади криволинейной трапеции

Область под кривой, ограниченная прямыми $x=a$ и $x=b$, называется **криволинейной трапецией**.





Площадь $s_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Интегральная сумма

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем весь отрезок на n промежутков точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку c_i и положим:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Классическое определение

Пусть предел интегральной суммы S_n при стремлении max Δx_i к нулю существует и не зависит от выбора точек x_1, x_2, … и c_1, c_2…. Тогда этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

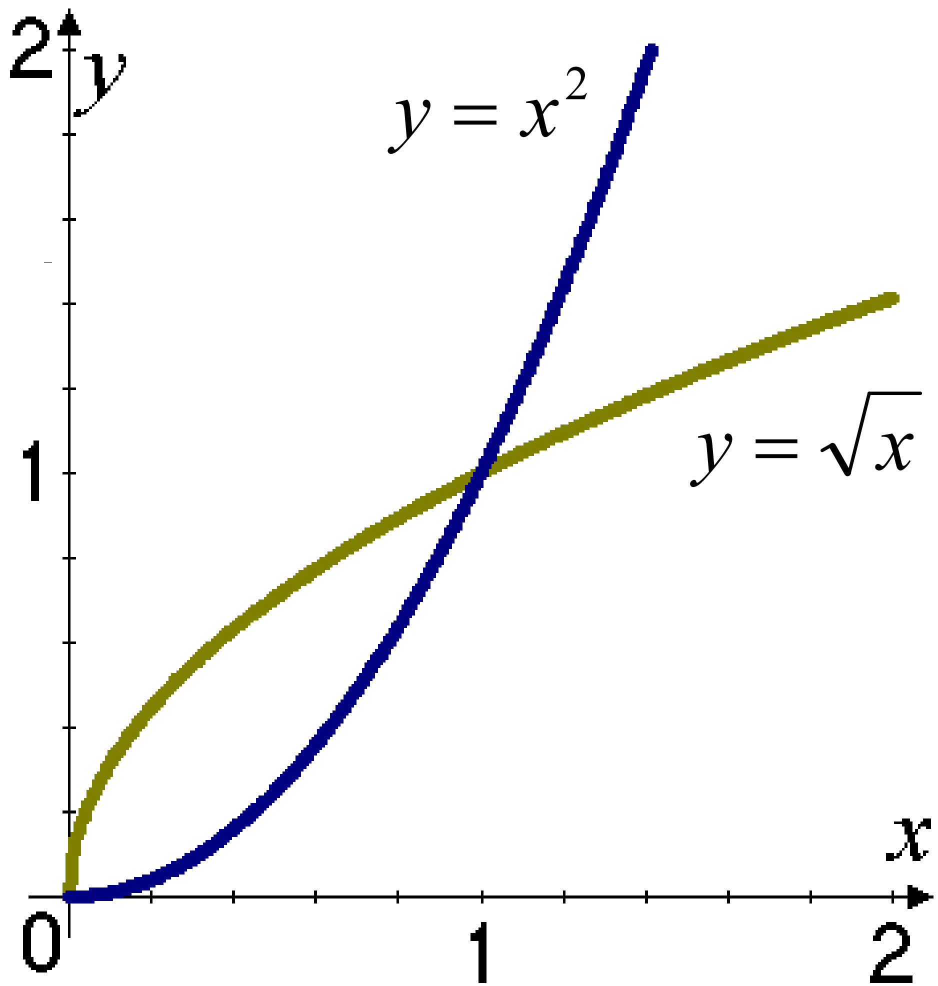
Сама функция в этом случае называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$.

Пример

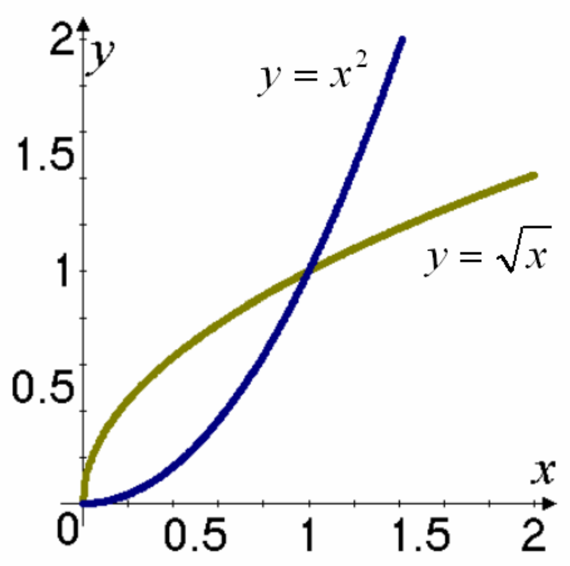
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = x^2$$



Решение



Находим определенный интеграл:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

8-4.
Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами

Интегралы от бесконечных функций

28 октября 2007 г.

Несобственные интегралы

Расширение понятия определенного интеграла на случаи бесконечных или разрывных функций приводит к несобственным интегралам:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Функция имеет бесконечный разрыв внутри отрезка в точке

$$c \in [a,b]$$

Несобственный интеграл первого рода

Интеграл с бесконечными пределами называется **несобственным интегралом первого рода**:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Условие: функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$.

Сходимость

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если этот предел существует, то говорят, что **несобственный интеграл сходится**.

В случае, если предел бесконечен или не существует, несобственный интеграл называется **расходящимся**.

Пример

Найти интеграл:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$$

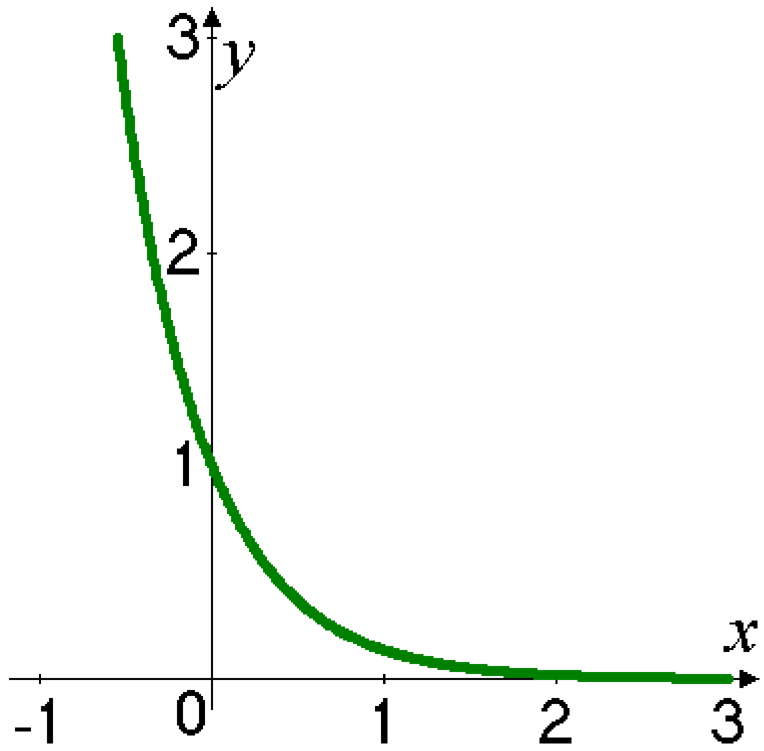
Решение. $$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-2x}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-2b} + \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}$$

Геометрический смысл

Интеграл соответствует площади под графиком:

$$S = \int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$



В данном случае интеграл сходится.

Площадь есть конечная величина.

Несобственный интеграл от –∞ до *b*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Условие: функция $f(x)$ непрерывна при $x \le b$.

Интеграл сходится, если предел конечен.

Несобственный интеграл от –∞ до +∞

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

Условие: функция $f(x)$ непрерывна для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Интеграл сходится, если оба предела существуют (конечны).

Несобственный интеграл второго рода

Несобственным интегралом второго рода называется интеграл от функции, которая имеет бесконечный разрыв:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Условие: a есть точка бесконечного разрыва функции $f(x)$.

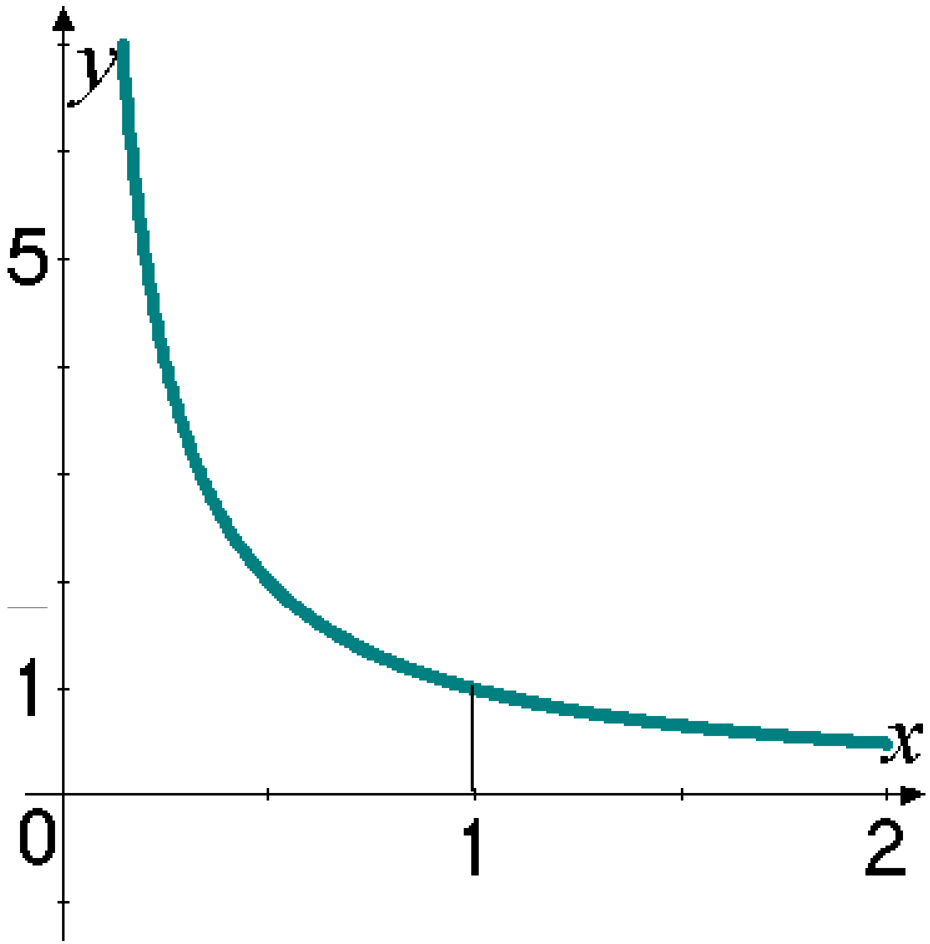
Интеграл сходится, если предел конечен.

Аналогично можно определить несобственный интеграл, который имеет бесконечный разрыв в точке b.

Пример 1

Найти площадь, ограниченную кривой $y = 1 / x$ на отрезке от 0 до 1:

$$S = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



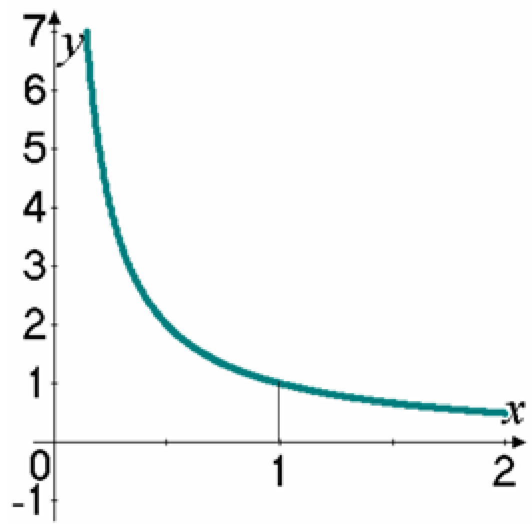
Функция имеет бесконечный разрыв в точке x = 0.

Решение

Находим несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln x)\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= 0 - \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon) = \infty$$

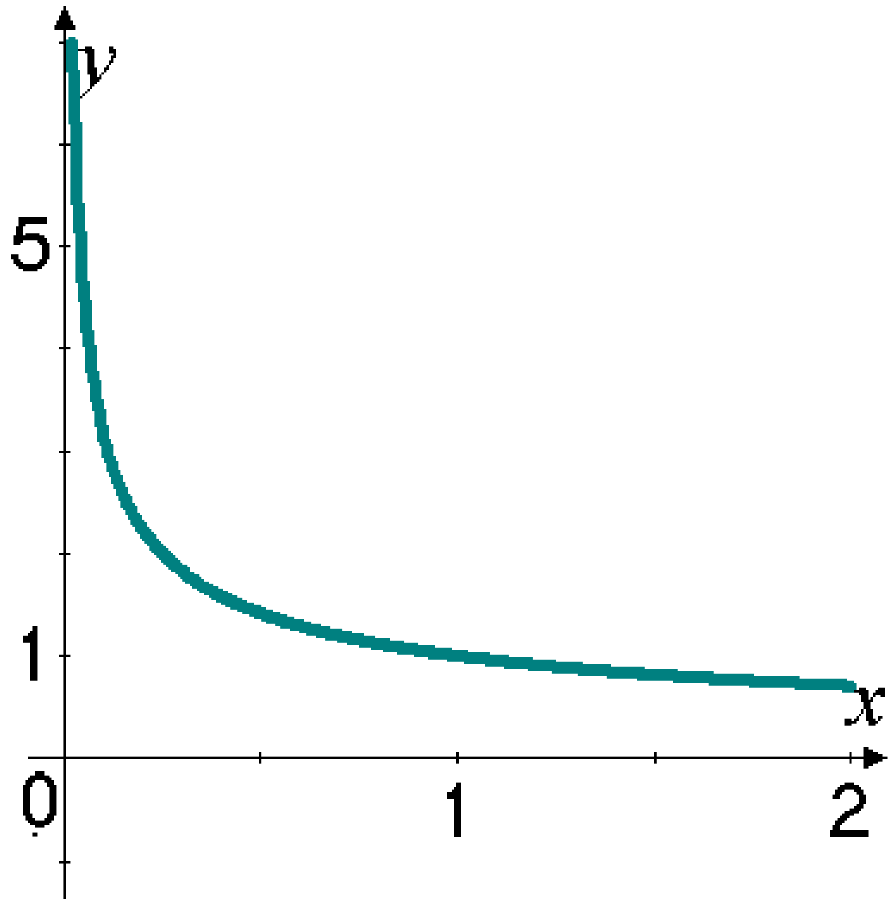


Интеграл расходится. Площадь бесконечна.

Пример 2

Найти площадь, ограниченную кривой:

$$S = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



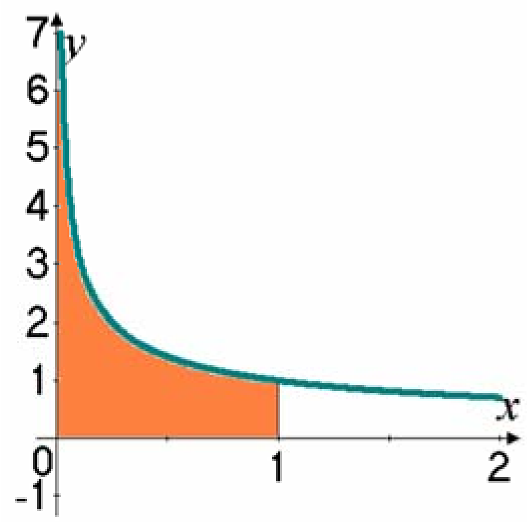
Функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$.

Решение

Находим несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{x})\Big|_\varepsilon^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$



Интеграл сходится. Площадь конечна и равна 2.

Приложения

Два примера нахождения площадей

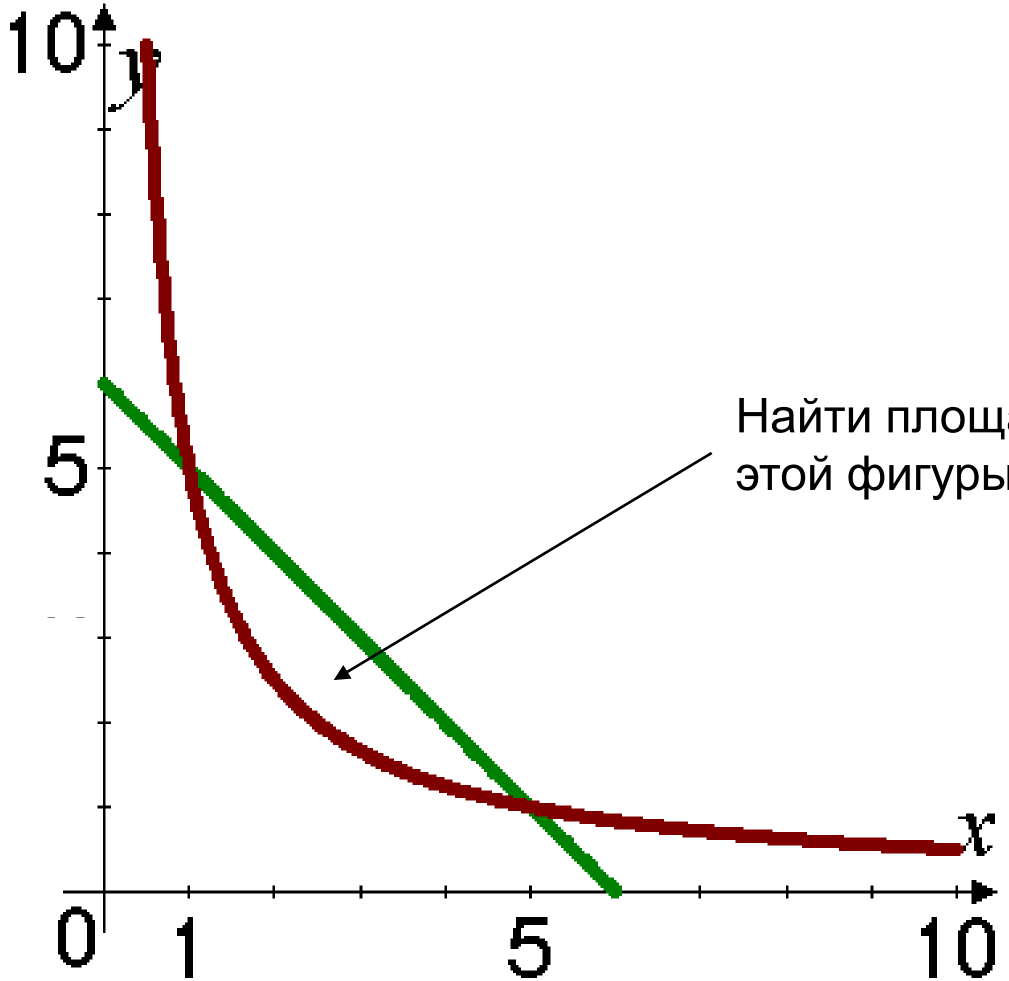
28 октября 2007 г.

Пример

Найти площадь, ограниченную линиями

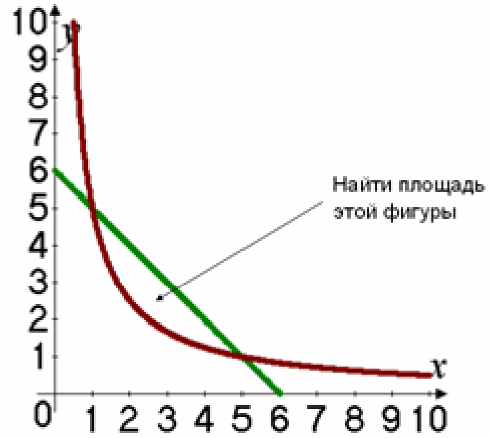
$$y = 6 - x$$

$$x\,y = 5$$



Решение

Находим определенный интеграл:



$$S = \int_1^5 \left((6 - x) - \frac{5}{x} \right) dx =$$

$$= 6\int_1^5 dx - \int_1^5 x dx - 5\int_1^5 \frac{dx}{x} = \left(6x - \frac{x^2}{2} - 5\ln x \right)\Bigg|_1^5 =$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln 5 - 6 + \frac{1}{2} + 0 = 12 - 5\ln 5$$

Локон Аньези

Найти площадь, ограниченную линией:

$$y = \frac{d^3}{d^2 + x^2}$$

Эту кривую называют в честь Марии Аньези, профессора университета в Болонье.

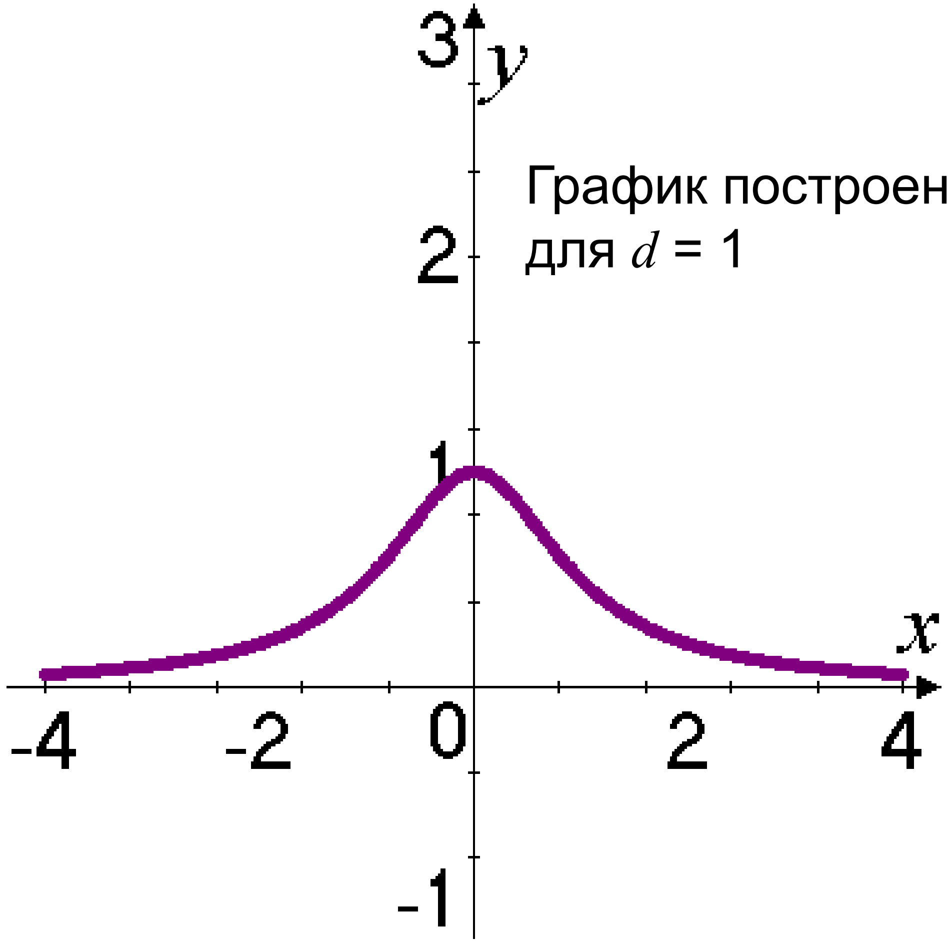
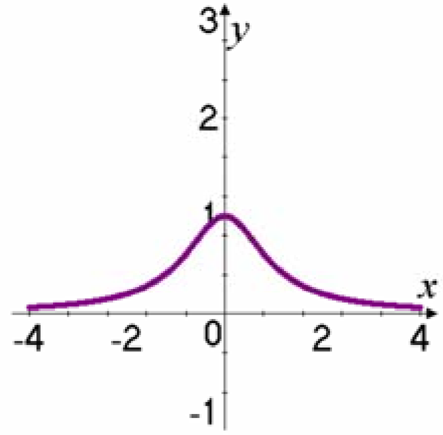


График построен для d = 1

Решение

Вычисляем несобственный интеграл:



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2 + x^2} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2 + x^2} dx =$$

$$= 2 \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} \frac{d^3}{d^2 + x^2} dx = 2 + \lim_{b \to \infty} d^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{d} =$$

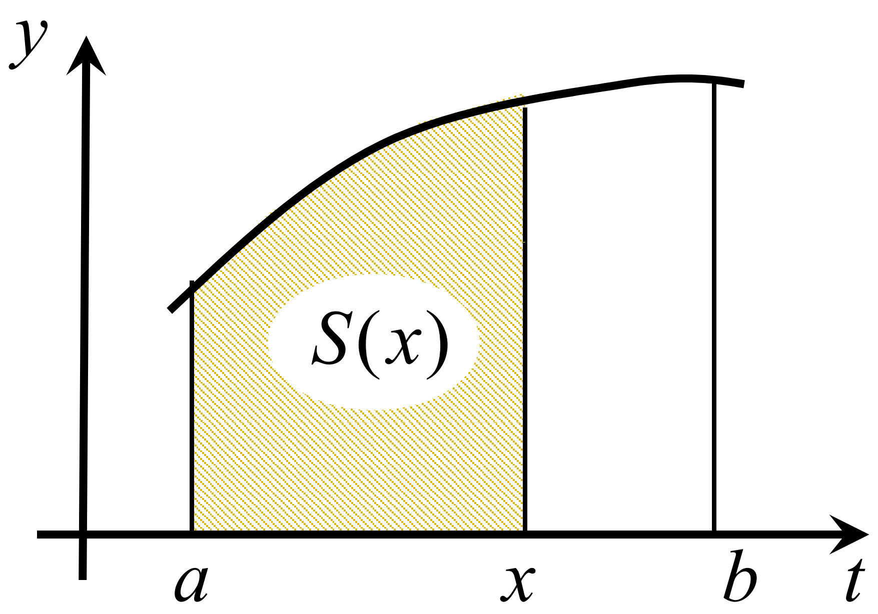
$$= 2d^2 \frac{\pi}{2} = \pi d^2$$

Получили, что площадь фигуры в четыре раза больше круга с диаметром d.

Переменный верхний предел

Можем рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Значение функции зависит от точки x, которая является переменной.

Теорема о производной

Если подынтегральная функция $y = f(t)$ непрерывна, то производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции для этого предела:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Следствие. Для любой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.